Modélisation asymptotique des conditions de paroi en aérocoustique.

Lauris JOUBERT, Laboratoire POEMS

Patrick JOLY, Laboratoire POEMS

Anne-Sophie BONNET-BENDHIA, Laboratoire POEMS

Mots-clés : aéroacoustique, méthode asymptotique, paroi impédante, couche limite, théorie spectrale, Fourier-Laplace, intégration dans le plan complexe, analyse de Kreiss.

Tube mince Nous commençons par un problème modèle simple, celui du tube 2D mince. Soit $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times \,]-\varepsilon, \varepsilon\,[$ le domaine d'intérêt. Nous supposons que ce tube est rempli par un fluide parfait compressible en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Nous considérons que la largeur du tube tend vers 0, ce qui est équivalent à une approche basse fréquence. Sous l'hypothèse que le profil de Mach est obtenu par scaling d'un profil de référence $\forall\, \mathbf{y} \in\,]-\varepsilon, \varepsilon\,[\,, \quad M_\varepsilon(\mathbf{y}) = M(\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon})$ on établit formellement le problème limite, quasi 1D, suivant:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + M(y)\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 U - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E U = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}\times]-1, 1[\tag{1}$$

et $V = 0$ où (U, V) est la limite, quand ε tend vers 0, de la perturbation du déplacement lagrangien $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t)$. E est l'opérateur de moyenne en y. Par la suite nous menons une étude modale de cette équation qui se réduit à l'étude spectrale d'un opérateur non-normal. Nous obtenons ainsi des conditions sur le profil entraînant le caractère bien posé ou non du problème. La démonstration de ces résultats est le fruit d'une étude ad-hoc utilisant la transformation de Fourier-Laplace ainsi que des techniques d'intégration dans le plan complexe. Nous obtenons par ce biais une expression quasi-explicite de la solution que nous exploitons numériquement. En plus de l'intérêt propre de ces simulations, nous obtenons une validation de notre modèle par comparaison avec un code 2D. Finalement, un produit dérivé de notre étude est l'obtention, par des techniques de perturbation, de résultats d'instabilité hydrodynamique du problème initial.

Paroi plane impédante Notre but est d'obtenir une condition sur la paroi impédante, en présence d'un écoulement, qui aboutisse à un problème bien posé. L'idée est de prendre en compte les effets de couche limite. Nous nous plaçons dans le domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times \,]-\infty, \varepsilon\,[$. Nous considérons une condition de type impédance à la paroi $y = \varepsilon$: $p(y = \varepsilon) = Z\, v(y = \varepsilon)$, où p est la pression et v représente la composante verticale du champ de vitesse eulerien. Z est un opérateur non-local en temps, dont la dépendance en temps est donnée après transformation de Laplace par une fonction $Z(s)$, où s est la variable de Laplace. Nous considérons un profil de Mach de la forme suivante:

$$M_\varepsilon(y) = M_\infty \text{ pour } y \in]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad M_\varepsilon(y) = M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \text{ pour } y \in]0, \varepsilon[.$$

Par une analyse asymptotique formelle, nous dérivons une condition de type Dirichlet to Neumann en $y = 0$, qui est une représentation idéalisée de la couche limite ainsi que des effets de paroi (ceux ci étant contenus dans l'impédance). Nous considérons les deux cas suivant:

(i) Cas d'une paroi rigide $Z \to \infty$: l'étude du caractère bien posé se ramène à celle du problème (1). Par ailleurs on s'intéressera à la reflexion des ondes acoustiques sur cette paroi enrichie; nous montrerons également qu'elle peut guider des ondes de surface. Finalement nous avons développé une méthode numérique et serons peut être en mesure de présenter des résultats numériques.

(ii) Cas général: on s'intéresse à l'étude du caractère bien posé de notre problème limite, ce qui est fait par une analyse modale dite de Kreiss. Si $Z(s) \sim s^\mu$ alors:

- $\mu > 0$: l'étude se ramène à celle du problème (1),
- $\mu = 0$: on est capable par des techniques de perturbation d'étendre des résultats, qu'ils soient positifs ou négatifs, du problème (1),
- $\mu < 0$: le problème est inconditionnellement mal posé.

Lauris JOUBERT, POEMS, UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA, 32 boulevard Victor, 75015 Paris.
lauris.joubert@gmail.com