Approximation du problème de Giesekus par éléments finis non-conformes pour des nombres de Weissenberg élevés

Julie JOIE, Université de Pau & INRIA Bordeaux-Sud-Ouest

On s'intéresse à la simulation numérique des écoulements de liquides polymères. De tels liquides sont, d'un point de vue rhéologique, des fluides viscoélastiques non-newtoniens. Les principales difficultés sont dues aux propriétés intrinsèques des liquides polymères et au couplage interne entre la viscoélasticité du liquide et l'écoulement. Ce couplage est quantifié par le nombre de Weissenberg, défini par $W_e = \lambda\dot{\gamma}$, où λ est le temps de relaxation du liquide et $\dot{\gamma}$ est la vitesse de déformation. Les codes commerciaux existants permettent généralement d'obtenir des résultats pour des nombres de Weissenberg inférieurs à 10.

Notre but est donc de développer une approche numérique permettant d'obtenir des résultats réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés. Dans la littérature, plusieurs équations constitutives existent pour décrire les écoulements de liquides polymères. Nous avons choisi d'utiliser l'équation non-linéaire de Giesekus définie de la manière suivante :

$$\underline{\tau} + \frac{1}{2G}\underline{\tau}\cdot\underline{\tau} + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\tau} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\underline{\tau} - \left(\underline{\tau}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^T + \nabla\boldsymbol{v}\cdot\underline{\tau}\right)\right) = \mu(\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T)$$

où $\underline{\tau}$ est le tenseur déviateur des contraintes, $\boldsymbol{v}$ la vitesse, μ la viscosité et $G = \mu/\lambda$ le module de torsion. Ce modèle permet d'obtenir des résultats réalistes pour des écoulements de cisaillement, des écoulements élongationnels et pour des écoulements mixtes. De plus, il requiert la connaissance de seulement deux paramètres du matériau : μ et λ.

On considère ici un écoulement stationnaire en 2D et un maillage composé de quadrangles. On approche la vitesse et la pression par les éléments finis non-conformes de Rannacher-Turek, et le tenseur des contraintes par des éléments finis totalement discontinus et constants par maille. On utilise un schéma décentré de type Lesaint-Raviart pour traiter le terme convectif sur τ.

Malgré de nombreux travaux, l'obtention de schémas qui convergent pour des nombres de Weissenberg élevés reste aujourd'hui encore un challenge scientifique. La perte de convergence semble provenir de la perte de positivité du tenseur de conformation ($\underline{C} = \frac{\lambda}{\mu}\underline{\tau} + \underline{Id}$) au niveau discret. On montre que sous certaines hypothèses, la méthode de Newton utilisée pour résoudre le problème non-linéaire discret conserve la positivité du tenseur de conformation.

Le bon comportement du schéma numérique pour des nombres de Weissenberg élevés sera illustré par des tests numériques.

Références

Julie JOIE, EPI Concha & LMA UMR CNRS 5142
INRIA Bordeaux-Sud-Ouest & Université de Pau
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU Cédex
`julie.joie@univ-pau.fr`
Roland BECKER, EPI Concha & LMA UMR CNRS 5142
INRIA Bordeaux-Sud-Ouest & Université de Pau
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU Cédex
`roland.becker@univ-pau.fr`
Daniela CAPATINA, EPI Concha & LMA UMR CNRS 5142
INRIA Bordeaux-Sud-Ouest & Université de Pau
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU Cédex
`daniela.capatina@univ-pau.fr`