Une méthode level-set pour résoudre le problème inverse de l'obstacle

Jérémi Dardé, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Laboratoire POEMS

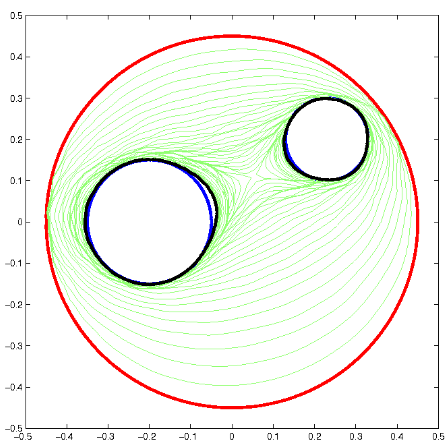
Mots-clés : problème inverse, méthode de quasi-réversibilité, méthode level-set, ...

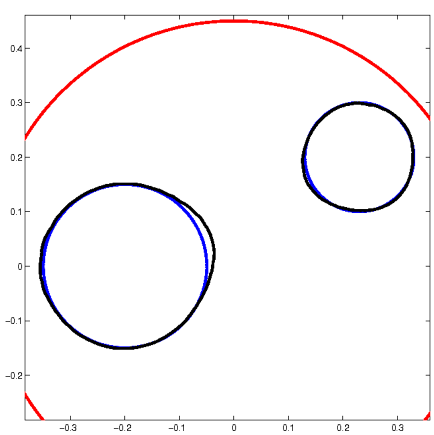
Introduction : on présente une nouvelle méthode de résolution du problème inverse de l'obstacle avec condition de Dirichlet. On construit une suite d'ouverts par résolutions successives de problèmes de Cauchy mal posés et de problèmes de Poisson. Cette suite converge vers l'obstacle recherché.

Soit $\mathcal{D}$ un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$. Connaissant un couple de données de Cauchy $(g_0, g_1) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, le problème inverse de l'obstacle consiste à trouver un ouvert continu $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$ et une fonction $u \in H^1(\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}) \cap C^0(\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{O})$ qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ u & = & g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu u & = & g_1 & \text{sur } \Gamma \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{array}\right.$$

Ce problème admet au plus une solution.
Supposons que nous connaissions u. On peut alors définir $\tilde{u} \in H^1(\mathcal{D})$ par $\tilde{u} = |u|$ dans $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$, $\tilde{u} \leq 0$ dans $\mathcal{O}$ et $\tilde{u} \in H^1_0(\mathcal{O})$. Soit $f \geq \Delta\tilde{u}$. Pour $\omega \subset \mathcal{D}$, on définit le problème $\mathtt{P}_\omega$: trouver $v \in H^1(\omega)$ telle que $\Delta v = f$ dans ω et $v - \tilde{u} \in H^1_0(\omega)$, problème qui admet une unique solution v_ω. On définit enfin une suite d'ouverts $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par $\mathcal{O} \subset \omega_0 \subset \mathcal{D}$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\omega_{m+1} = \omega_m \setminus \mathit{supp}(\sup(0, v_{\omega_m}))$. On a $\mathcal{O} \subset \omega_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus, la suite d'ouverts $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge (pour la distance de Hausdorff) vers ω, vérifiant $\mathcal{O} \subset \omega$. Si de plus on suppose que $\|v_{\omega_m} - v_\omega\|_{H^1(\omega)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$, on a $\omega = \mathcal{O}$.
À partir de ce résultat, nous proposons la méthode de résolution du problème de l'obstacle suivante [2] : partant d'un ouvert ω_0 tel que $\mathcal{O} \subset \omega_0$, on cherche une approximation u_m de la solution u dans $\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_m$ à l'aide de la méthode de quasi-réversibilité [1], puis on résout dans ω_m le problème de Poisson $\Delta v_m = f$ dans ω_m, $v_m = |u_m|$ sur $\partial\omega_m$, avec un second membre f suffisamment grand. Finalement on actualise ω_m par $\omega_{m+1} := \{x \in \omega_m \,|\, v_m(x) < 0\}$.
Des résultats numériques seront présentés pour montrer l'efficacité de la méthode, avec données exactes et bruitées.





Références

[1] Lattès, R. & Lions, J.-L., *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, DUNOD, 1967.

[2] Bourgeois, L. & Dardé, J., *A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem*, Inverse Problems and Imaging, 2010.

Jérémi Dardé, Laboratoire POEMS, ENSTA, 32 Boulevard Victor, 75739 Paris Cedex 15
`jeremi.darde@ensta.fr`