

θ -schémas d'ordre élevé inconditionnellement stables pour la discrétisation temporelle de l'équation des ondes

Sébastien Impériale, CEA List

Considérons une méthode d'éléments finis d'ordre élevé pour la discrétisation spatiale de l'équation des ondes, représentée par une matrice A_h symétrique semi-définie positive : $\partial_{tt}u - \Delta u = 0 \rightsquigarrow \partial_{tt}u_h + A_h u_h = 0$. La discrétisation en temps la plus classique conduit au schéma saute mouton (1). Cette discrétisation est d'ordre 2 en temps. La technique de l'équation modifiée (voir [1]) permet d'obtenir des schémas à l'ordre supérieur en ajoutant des termes du type $c_k \Delta t^{2(k-1)} A_h^k u_h^n$ au schéma saute mouton, comme l'illustre (2) pour le schéma à l'ordre 4 :

$$(1) \quad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n = 0 \qquad (2) \quad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} A_h^2 u_h^n = 0$$

Schéma saute mouton Equation modifiée d'ordre 4

Des techniques d'énergie montrent que ces deux schémas sont stables sous condition CFL. Cependant, l'utilisation de ces schémas sur des maillages non réguliers impose l'utilisation de pas de temps d'autant plus petits que l'irrégularité du maillage est forte (mailles très petites devant d'autres, maillage anisotrope ...). Une solution à ce problème peut être d'utiliser un pas de temps local : un pas de temps plus petit sera choisi dans les zones où le maillage dégénère. Ces techniques sont bien maîtrisées à l'ordre 2 (par exemple dans [2]). La technique de pas de temps locaux aux ordres supérieurs faite dans [3], bien que stable sous condition CFL d'après les expériences numériques, ne permet pas de démontrer cette stabilité. Une alternative est l'utilisation de θ -schémas d'ordre 2. Ces schémas implicites et inconditionnellement stables pour $\theta \geq 1/4$. A chaque pas de temps une matrice doit être inversée. Ce surcoût, par rapport aux méthodes explicites, est compensé par le fait que le pas de temps toléré est arbitrairement grand. Le choix d'un grand pas de temps permet de gagner en efficacité mais occasionne une perte de précision. Dans ce contexte, nous présentons une famille de schémas d'ordre élevé en temps :

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h \{u_h\}_{\theta_0}^n = 0 \qquad \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \sum_{m=1}^{p-1} \beta_m^{p-1} \Delta t^{2m} A_h^{m+1} \{u_h\}_{\theta_m}^n = 0$$

θ -schéma d'ordre 2 θ -schéma d'ordre $2p$

où $\{u_h\}_{\theta_i} = \theta_i u_h^{n+1} + (1 - 2\theta_i) u_h^n + \theta_i u_h^{n-1}$ et les β_m^p sont des coefficients définis par récurrence (voir [4]). Nous démontrerons que pour certaines valeurs des θ_i , ces schémas sont inconditionnellement stables. Nous présenterons des techniques de résolution originales qui conduisent, pour un schéma d'ordre $2p$, à $\lceil p/2 \rceil$ résolutions du type $\alpha I_h + A_h$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, ainsi que des résultats numériques.

Références

- [1] P JOLY AND J RODRÍGUEZ, *Optimized higher order time discretization of second order hyperbolic problems: Construction and numerical study*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009.
- [2] F COLLINO AND T FOUQUET AND P JOLY, *A conservative space-time mesh refinement method for the 1-d wave equation. Part I: Construction*, Numerische Mathematik, 2003.
- [3] J DIAZ AND M GROTE, *Energy conserving explicit local time-stepping for second-order wave equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2009.
- [4] J CHABASSIER AND S IMPERIALE, *High order theta schemes for the second order wave equation*, Research Report, INRIA, to appear.

Sébastien Impériale, CEA List, F-91191, Gif-sur-Yvette, France.
sebastien.imperiale@inria.fr

Juliette Chabassier, Projet POEMS, INRIA Rocquencourt, Rocquencourt BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex
juliette.chabassier@inria.fr