Méthodes de relaxation d'ondes de Schwarz pour l'quation de la chaleur sémilinéaire dans un domaine cylindrique

Minh Binh TRAN, LAGA, Université Paris 13

Mots-clés : Méthodes de relaxation d'ondes de Schwarz, l'quation de la chaleur sémilinéaire

L' algorithme de Schwarz sous sa forme moderne fut introduit par P.L. Lions dans [4]. Il proposa également d'utiliser l'algorithme pour des problèes d'évolution. Cet algorithme, nommé par la suite Schwarz waveform relaxation, fut ensuite étudié indépendamment dans [2] et [3] pour l'équation d'advection-diffusion linéaire. Dans ces articles fondateurs, la convergence de l'algorithme fut établie en utilisant le principe du maximum et la transformation de Laplace en temps.
Une extension à l'équation de réaction-diffusion $\partial_t u - \Delta u - f(u) = 0$ en dimension 1 fut considérée dans [1]. Pour un problème non linéaire, chaque nouvelle itération de l'algorithme introduit un nouveau temps d'existence plus petit. Avec l'hypothèse $f'(u) \leq C$, ce problème disparaît et les itérées sont définies naturellement sur le même intervalle de temps. La convergence linéaire est ensuite obtenue sur un intervalle de temps non borné par des calculs explicites sur l'éuation linéarisée. Ainsi, l'algorithme hérite des propriétés essentielles de la relaxation d'onde. D'autres nonlinéarités, en dimension supérieure, furent considérées par Lui dans [5]. Le cadre de l'étude est la méthode de monotonie dans lequel il n'y a pas non plus de problème de temps d'existence.
Nous considérons ici l'équation de la chaleur semi-linéaire $\partial_t u - \Delta u - f(u) = 0$ dans un domaine cylindrique $\Omega = D \times (a, b)$ de $\mathbb{R}^3$, avec une non-linéarité $f(u)$ qui est dans $C^1(\mathbb{R})$ et il existe $C_f > 0$, $p > 1$ tel que $|f'(x)| \leq C_f |x|^{p-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Nous proposons une preuve d'existence et de convergence de l'algorithme de Schwarz pour l'équation, qui repose sur l'utilisation du théorème de Banach dans un espace bien choisi, et sur de nouvelles estimations d'erreur cylindriques. Nous découpons le domaine en bandes cylindriques $\Omega_i = D \times (a_i, b_i)$, avec $a_1 = a$ and $b_I = b$. Ces bandes se recouvrent, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, I\}$, $a_{i+1} < b_i < a_{i+2}$. A chaque étape, nous devons donc résoudre dans Ω_i un problème de Cauchy avec des conditions aux limites de Dirichlet hétérogène. Le domaine n'a pas la régularité voulue pour appliquer les théorèmes classiques, nous avons donc établi de nouvelles preuves. Pour cela, nous introduisons l'équation intégrale associée $w(t) = \int_0^t S(t-s) f(w+v)(s) ds$, que nous étudions à l'aide du théorème de Banach dans le sous-espace Y_T de $L^\infty_{loc}((0,T), L^{2p}(\Omega))$, muni de la norme $||u||_{Y_T} = \sup_{t \in (0,T)} t^\alpha ||u(t)||_{2p}$. Par utilisér la méthode de point fixé, nous avons ainsi une solution unique à notre problème. Pour montrer que l'algorithme converge linéairement, nous établissons des estimations cylindriques. Nous introduisons la fonction $\Psi(x,t) = (u - u_j^k)^2 \exp(\beta(z - a_j) - \gamma t)$, dans Ω_j, et l'opérateur parabolique $\mathcal{L} = \partial_t - \Delta + 2\beta \partial_z$. Pour $\gamma - \beta^2$ suffisamment grand, $\mathcal{L}(\Psi) \leq 0$. Le maximum de Ψ est donc atteint sur l'une des frontières des $\Omega_j \times [0, T)$. En parcourant les intervalles de b à a, nous obtenons le résultat.

Références

[1] M. J. Gander.*A waveform relaxation algorithm with overlapping splitting for reaction diffusion equations.* Numer. Linear Algebra Appl., 6(2):125–145, 1999. Czech-US Workshop in Iterative Methods and Parallel Computing, Part 2 (Milovy, 1997).

[2] M. J. Gander and A. M. Stuart.*Space time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation.* SIAM J., 19:2014–2031, 1998.

[3] E. Giladi and H. B. Keller.*Space time domain decomposition for parabolic problems.* Numerische Mathematik, 93(2):279–313, 2002.

[4] P.-L. Lions.*On the Schwarz alternating method. I.* In R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant, and J. Périaux, editors, *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–42, Philadelphia, PA, 1988. SIAM.

[5] S. H. Lui.*On monotone iteration and Schwarz methods for nonlinear parabolic pdes.* Journal of Comp. and Appl. Math., 2003.

Minh Binh TRAN, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications et Département de Mathématiques, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 - Villetaneuse
`binh@math.univ-paris13.fr`