Etude numérique d'états stationnaires localisés pour l'equation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel quadratique

Fouad HADJ SELEM, Université Reims Champagne-Ardenne

Mots-clés : Solutions stationnaires, Méthode de tir, Equations de Schrödinger, Potentiel quadratique, Condensat de Bose Einstein, Exposant critique de Sobolev.

Le but de cet exposé est de présenter des résultats numériques récents concernant la structure et les propriétés des états stationnaires localisés de l'équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel quadratique; qui s'écrit :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi - \|x\|^2\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0,\ \ \psi = \psi(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0. \tag{1}$$

Il s'agit du modèle mathématique idéal intervenant dans la description d'un condensat de Bose-Einstein plongé dans un champ magnétique. Ce phénomène correspond à un état particulier d'un gaz de bosons à très basse température et a été prédit par Albert Einstein dès 1924.

Dans ce cas, il est possible de s'intéresser aux états stationnaires définis par $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ avec u fonction localisée. Le problème de départ est alors ramené à la résolution d'un problème elliptique non linéaire posé sur l'espace entier, dont on cherche les solutions radiales de la forme $u(x) := U(\|x\|)$. Contrairement au cas sans potentiel, ω doit être traité comme un paramètre en plus de d et σ (voir [1]). De plus, la présence du terme correspondant au potentiel quadratique ne permet pas d'utiliser l'identité de Pohozaev pour obtenir des conditions nécessaires à l'existence de tels états si $\omega < 0$. Il faut alors traiter les 3 types de non-linéarité : critique, sous-critique et surcritique.

En utilisant la théorie des bifurcations, on démontre l'existence de branches bifurquées de solutions localisées au voisinage de chaque valeur propre. De plus, ces solutions peuvent être paramétrées par leur nombre de noeuds k. Notre objectif est de générer numériquement le diagramme de bifurcation pour les trois types de non-linéarités. Pour cela, on étudie théoriquement la convergence de l'algorithme de tir adapté à cette équation et on montre que cette méthode permet de construire ces diagrammes indépendamment du type de la non-linéarité (voir les figures 1 et 2). Ceci nous a permis de donner des réponses optimales à des questions ouvertes concernant l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions stationnaires en fonction de la dimension d, de la fréquence ω, de la puissance non linéaire σ et du nombre d'annulations k (voir [2]).

Figure 1: Non-linéarité sous-critique: $d = 2$, et $\sigma = 1.5$.

Figure 2: Non linéarité surcritique: $d = 3$ et $\sigma = 2.2$.

Références

[1] Di Menza L., Hadjselem F., *Numerical study of solitons for nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential*, À paraître.

[2] Hadjselem F., *Radial solutions with prescribed numbers of zeros for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential*, (en préparation)

Fouad HADJ SELEM, Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims, BP 1039, 51687 Reims Cedex 02
`hadjselemfoued@yahoo.fr`