

Analyse mathématique de la diffraction par une jonction de guides optiques

Benjamin GOURSAUD, POEMS

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, POEMS

Christophe HAZARD, POEMS

Mots-clés : guide d'ondes ouvert, condition de rayonnement, transformation de Fourier généralisée

On s'intéresse au problème de diffraction en régime harmonique par la jonction entre deux guides ouverts uniformes différents (typiquement la jonction entre une fibre optique et un micro-guide optique). Nous allons considérer une géométrie bidimensionnelle : $\{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$, où x désigne la direction de propagation et z la direction transverse, et l'équation de Helmholtz où le nombre d'onde $k_{\text{per}}(x, z)$ est une perturbation locale de $k(x, z)$, i.e. $(k_{\text{per}}^2 - k^2)$ est à support compact, où $k(x, z)$ est donné par :

$$k(x, z) = \begin{cases} k_+(z) & \text{si } x > 0, \\ k_-(z) & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec} \quad k_{\pm}(z) = \begin{cases} k_0^{\pm} & \text{si } 0 \leq z \leq h_{\pm}, \\ k_{\infty} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } k_0^{\pm} > k_{\infty}.$$

Dans la littérature, différentes approches sont utilisées pour traiter le problème de diffraction par des géométries complexes (par exemple surfaces "rugueuses", cf. [1]) mais elles ne s'appliquent pas à notre cas, à cause de la présence d'ondes guidées. L'originalité de l'approche choisie est d'utiliser des conditions de rayonnement modales (cf. [2]), fondées sur les transformations de Fourier généralisées adaptées au guide de gauche et au guide de droite. Les transformations de Fourier généralisées sont les opérateurs de décomposition sur les modes. Nous obtenons le problème (P_{dif}) suivant : étant donné u_{inc} une onde incidente, trouver l'onde perturbée u_{per} telle que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\text{per}}(x, z) - k_{\text{per}}^2(x, z)u_{\text{per}}(x, z) = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u_{\text{per}}(x, 0) = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et telle que l'onde diffractée $u = u_{\text{per}} - u_{\text{inc}}$ est sortante, dans le sens où dans la décomposition de u sur les modes, on ne garde que les modes "sortants", i.e. propagatifs ou évanescents lorsque $|x| \rightarrow +\infty$.

Pour montrer que ce problème est bien posé, nous allons tout d'abord montrer que le problème de radiation dans la jonction abrupte (qui correspond au cas où le nombre d'onde est égal à k) entre deux guides d'ondes ouverts uniformes est bien posé. Grâce à cela, on montre que le problème de diffraction (P_{dif}) se ramène à une équation de type Lippman-Schwinger $(I + K)u = g$, où K est un opérateur compact. L'alternative de Fredholm nous assure qu'il suffit de montrer l'unicité du problème pour que le problème soit bien posé.

La difficulté essentielle concerne l'unicité. L'idée est de montrer que la solution u est nulle en dehors de la perturbation. Par principe de prolongement unique, nous en déduisons que $u = 0$. Nous procédons en deux étapes : la première consiste à montrer, en utilisant les flux d'énergie, que dans la décomposition sur les modes, les composantes sur les modes propagatifs sont nulles. Ainsi, il ne reste que les composantes évanescentes. La deuxième étape consiste à montrer que la transformée de Fourier généralisée de u se prolonge continûment (par rapport à la variable spectrale) en une fonction analytique dans le demi-plan complexe inférieur. C'est là que réside la difficulté majeure : pour cette deuxième étape, nous démontrons un résultat original montrant comment on peut exprimer la transformation de Fourier généralisée du guide de gauche en fonction de celle du guide de droite et d'une autre transformation qui a les propriétés d'analyticité souhaitées.

Références

- [1] SN. CHANDLER-WILDE AND P. MONK, *Existence, Uniqueness, and Variational Methods for Scattering by Unbounded Rough Surfaces*, SIAM J. Math. Anal. 37(2) :598–618, 2005.
- [2] A.S. BONNET-BENDHIA, L. CHORFI, G. DAKHIA AND C. HAZARD, *Diffraction by a defect in an open waveguide : a mathematical analysis based on a modal radiation condition*, SIAM J. Appl. Math., 70(3) :677–693, 2009.