Détection d'un objet immergé dans un fluide

Fabien CAUBET, Université de Pau et des Pays de l'Adour

L'objectif du travail est d'identifier un objet immergé dans un fluide par des méthodes d'optimisation de forme. Autrement dit, nous cherchons un domaine ω strictement inclus dans un ouvert Ω tel que le problème de Stokes surdéterminé suivant admette une unique solution :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u + \nabla p & = & f\,, & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}\,, \\ \operatorname{div} u & = & 0\,, & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}\,, \\ -\nu\partial_n u + p\,n & = & 0\,, & \text{sur } \partial\left(\Omega\backslash\overline{\omega}\right)\,, \\ u & = & f_b \mathbf{1}_O\,, & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array}\right.$$

où $O \subset \partial\Omega$. Pour résoudre ce problème inverse, une manière de procéder est de considérer la fonctionnelle suivante :

$$J(\omega) := \int_O (u - f_b)^2\,,$$

où u est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u + \nabla p & = & f\,, & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}\,, \\ \operatorname{div} u & = & 0\,, & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}\,, \\ -\nu\partial_n u + p\,n & = & 0\,, & \text{sur } \partial\left(\Omega\backslash\overline{\omega}\right)\,. \end{array}\right. \tag{1}$$

Nous allons alors nous intéresser au problème suivant :

$$\omega^* = \operatorname*{argmin}_{\omega} J(\omega)\,, \tag{2}$$

et considérer des perturbations de ω (Ω est fixe), notées ω_t, auxquelles on associe une solution (u_t, p_t) du problème (1) pour $\omega = \omega_t$. Seule la partie théorique est présentée ici.

Dans un premier temps, nous chercherons à caractériser, après avoir montré leur existence, les dérivées de forme de $t \mapsto u_t$ et $t \mapsto p_t$. Ainsi, nous pourrons dériver l'application $t \mapsto J(\omega_t)$ et obtenir l'expression de $DJ(\omega) \cdot V$, où V est un champ de déformation. Ceci nous permettra de calculer numériquement le gradient de la fonctionnelle.

Le but étant ensuite d'étudier la stabilité du problème d'optimisation (2), nous étudierons l'existence de dérivées secondes de forme et nous exprimerons la différentielle seconde de J en un point stationnaire ω^*. Avec l'expression de cette dernière et à l'aide d'un théorème de régularité locale, nous montrerons que $D^2J(\omega^*)$ est compacte et n'est donc pas coercive.

Références

[1] Franck Boyer, Pierre Fabrie, *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Springer-Verlag, 2006

[2] Antoine Henrot, Michel Pierre, *Variation et optimisation de formes. Une analyse géométrique.*, Springer-Verlag, 2005.

[3] Jacques Simon, *Domain variation for drag in Stokes flow*, Lecture notes in control and information sciences, 1991.

Fabien CAUBET, LMA Pau UMR CNRS 5142
Bâtiment IPRA - Universit de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'université - BP 1155
64013 PAU CEDEX
fabien.caubet@etud.univ-pau.fr