

# Sur le schéma upwind pour l'équation de transport

**Franck BOYER**, LATP, Université Paul Cézanne, Aix-Marseille 3

On s'intéresse dans ce travail au problème de transport-réaction suivant posé sur un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , lipschitzien et régulier par morceaux

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) + c\rho = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ \rho(0, \cdot) = \rho^0, \\ \rho = \rho^e, & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma, \text{ là où } (v \cdot \nu) < 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$  est la donnée initiale,  $\rho^e \in L^\infty(]0, T[ \times \Gamma)$  est la donnée au bord. On rappellera tout d'abord les principales propriétés de ce problème dans le cas d'une régularité faible des données (voir [1]). On supposera typiquement  $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$ ,  $c \in L^1(]0, T[ \times \Omega)$ ,  $(c + \operatorname{div} v)^- \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ ,  $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ . On s'intéressa aux questions suivantes: existence et unicité de la solution, existence des traces, notion de solution renormalisée (due initialement à DiPerna et Lions [2]).

Dans un second temps, on propose d'étudier le schéma volumes finis upwind implicite pour ce problème :

$$\begin{cases} |\kappa| \frac{\rho_\kappa^{n+1} - \rho_\kappa^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{C} \in \mathcal{E}_\kappa \cap \mathcal{E}_{int}} |\sigma| \left( (v_{\kappa,\sigma}^n)^+ \rho_\kappa^{n+1} - (v_{\kappa,\sigma}^n)^- \rho_\sigma^{n+1} \right) \\ \quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa \cap \mathcal{E}_{bd}} |\sigma| v_{\kappa,\sigma}^n \rho_\sigma^{n+1} + |\kappa| c_\kappa^n \rho_\kappa^{n+1} = 0, \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \forall \kappa \in \mathcal{T}, \\ \rho_\kappa^0 = \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa \rho^0 dx, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}, \\ \rho_\sigma^{n+1} = \frac{1}{\delta t |\sigma|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \rho^e dx dt, \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{bd}, \text{ t.q. } v_{\kappa,\sigma}^n \leq 0, \\ \rho_\sigma^{n+1} = \rho_\kappa^{n+1}, \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{bd}, \text{ t.q. } v_{\kappa,\sigma}^n > 0, \end{cases} \quad (2)$$

où on utilise des notations standard pour les schémas volumes finis (voir [3]) :  $\kappa$  désigne un volume de contrôle dans le maillage  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{E}_\kappa$  l'ensemble de ses faces,  $\mathcal{E}_{int}$  et  $\mathcal{E}_{bd}$  les faces intérieures et du bord,  $v_{\kappa,\sigma}^n$  est la moyenne de  $(v \cdot \nu_{\kappa,\sigma})$  sur  $]t^n, t^{n+1}[ \times \sigma$  où  $\nu_{\kappa,\sigma}$  est la normale unitaire sortante à  $\kappa$  sur  $\sigma$ , enfin  $c_\kappa^n$  est la moyenne de  $c$  sur  $]t^n, t^{n+1}[ \times \kappa$ .

Dans le cas où le champ de vitesse est lipschitzien, tangent au bord du domaine et que la donnée initiale est suffisamment régulière, il est bien connu que ce schéma converge et on sait même que pour des données  $BV$ , le schéma converge à l'ordre 1/2 en norme  $L^\infty(]0, T[, L^1(\Omega))$  (voir [4] dans le cas  $c = \operatorname{div} v = 0$ ).

Dans cette communication, sans hypothèse supplémentaire de régularité sur les données  $v$ ,  $c$ ,  $\rho^0$ ,  $\rho^e$  et dans le cas d'un champ non tangent au bord du domaine, on montrera que le schéma est bien posé et que la solution approchée converge **fortement** dans  $L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$  pour tout  $p < +\infty$ , vers la solution du problème (1). On montrera également la convergence des traces en un certain sens.

Il est à noter que la technique des solutions renormalisées (à travers, en particulier, le lemme de Friedrichs) est essentielle dans la preuve de convergence forte.

## Références

- [1] F. BOYER, *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation*, Differential and Integral Equations Vol. 18, N8, pp. 891-934, 2005.
- [2] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. (98), pp 511-547, 1989.
- [3] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN, *The finite volume method*, Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 715-1022, 2000.
- [4] B. MERLET, J. VOVELLE, *Error estimate for a Finite Volume Scheme*, Numer. Math. 106, no. 1, 129-155, 2007.

**Franck BOYER**, LATP, Université Paul Cézanne, FST de Saint-Jérôme, Av. Escadrille Normandie-Niemen, 13397 MARSEILLE Cedex 13

fboyer@latp.univ-mrs.fr