

Convergence d'un algorithme glouton pour des problèmes convexes non-linéaires en grande dimension

Virginie EURLACHER, CERMICS, École nationale des ponts et chaussées

Dans cette communication, nous présentons un algorithme glouton basé sur une décomposition de variables, destiné à calculer le minimum global d'une fonctionnelle d'énergie fortement convexe. Il s'agit d'une généralisation du résultat obtenu par Le Bris, Lelièvre et Maday [1] dans le cas d'un problème de Poisson linéaire en grande dimension. Le principal avantage de cette méthode est sa capacité à traiter efficacement des problèmes convexes non linéaires en grande dimension.

Plus précisément, notre algorithme peut s'énoncer de la manière suivante. Soient p et d deux entiers strictement positifs, et \mathcal{T} et \mathcal{X} des ensembles ouverts de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^d respectivement. Soient V_t et V_x des espaces de Hilbert de fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur \mathcal{T} et \mathcal{X} . On définit le produit tensoriel suivant pour tout $(r, s) \in V_t \times V_x$,

$$r \otimes s : \begin{cases} \mathcal{T} \times \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto r(t)s(x) \end{cases}, \quad (1)$$

ce qui définit une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$. Nous notons $\Sigma = \{r \otimes s \mid (r, s) \in V_t \times V_x\}$. Soit V un espace de Hilbert de fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$. La norme associée est notée $\|\cdot\|_V$. Soit \mathcal{E} une fonction à valeurs réelles différentiable définie sur V .

Nous faisons les hypothèses suivantes:

(H1) $\text{Vect}(\Sigma)$ est un sous-ensemble dense de V pour $\|\cdot\|_V$.

(H2) De toute suite de Σ bornée dans V , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans V vers un élément de Σ .

(H3) La fonctionnelle \mathcal{E} est fortement convexe pour $\|\cdot\|_V$.

(H4) Le gradient de \mathcal{E} est lipschitzien sur les ensembles bornés.

L'unique minimiseur global de \mathcal{E} sur V est noté $u \in V$. Son existence et son unicité sont assurées par le caractère fortement convexe de la fonctionnelle \mathcal{E} . Nous proposons d'étudier l'algorithme suivant: la suite $((r_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in (V_t \times V_x)^{\mathbb{N}^*}$ est définie par récurrence et vérifie:

$$(r_n, s_n) \in \underset{(r, s) \in V_t \times V_x}{\text{argmin}} \mathcal{E} \left(\sum_{k=1}^{n-1} r_k \otimes s_k + r \otimes s \right). \quad (2)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=1}^n r_k \otimes s_k.$$

Nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1 *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4), les itérations de l'algorithme sont bien définies, dans le sens où (2) possède au moins un minimiseur (r_n, s_n) . De plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans V vers u .*

Nous proposons d'illustrer notre algorithme sur un exemple prototype, la propagation d'incertitudes sur le problème de l'obstacle.

Références

- [1] C. LE BRIS AND T. LELIÈVRE AND Y. MADAY, *Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensionnal partial differential equations*, Constructive Approximation, 2009.

Virginie EURLACHER, Université Paris-Est, CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2
ehrlachv@cermics.enpc.fr