

Etude numérique de la stabilité des solutions des équations de Ginzburg-Landau sur un demi-espace

Pierre del Castillo, Université de Picardie Jules Verne

Séraphin Mefire, Université de Nancy I

En supraconductivité, les états d'un échantillon soumis à un champ magnétique extérieur sont décrits par les minima d'une fonctionnelle introduite par Ginzburg-Landau [1]. Dans le cas particulier d'une plaque infinie de grande épaisseur, des simplifications physiques conduisent à l'étude de l'énergie

$$\varepsilon_\infty(f, A) = \int_0^{+\infty} [\kappa^{-2} f'(x)^2 + A'(x)^2 + f(x)^2 A(x)^2 + \frac{(1 - f(x)^2)^2}{2}] dx + 2hA(0),$$

définie sur les paires $(1 - f, A) \in (H^2(]0, +\infty[))$. Dans ce contexte, A représente le potentiel magnétique, f le paramètre d'ordre caractérisant l'état du supraconducteur. Le paramètre h est proportionnel à l'intensité du champ magnétique extérieur et κ est le paramètre de Ginzburg-Landau. Un point critique (f, A) de la fonctionnelle ε_∞ satisfait le système de Ginzburg-Landau

$$\begin{cases} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + f A^2 & = 0 & \text{on }]0, +\infty[, \\ -A'' + A f^2 & = 0 & \text{on }]0, +\infty[, \end{cases} \quad (1)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$f'(0) = 0, \quad A'(0) = h. \quad (2)$$

En outre, une paire (f, A) satisfaisant (1)-(2) vérifie la propriété $0 < f(x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$. Dans [2], on montre que l'ensemble $\{(f(0), A'(0)) \mid (f, A) \text{ est solution de (1) - (2)}\}$ est le graphe d'une fonction σ_κ définie sur $]0, 1]$ par $f(0) \mapsto A'(0)$. D'autre part, dans [4], C. Bolley et B. Helffer ont établi que σ_κ est continue et bornée sur $]0, 1]$. Le champ de surchauffe $h^{sh}(\kappa)$ est alors défini comme le maximum de σ_κ sur $]0, 1]$. Ce champ critique joue un rôle prépondérant dans de nombreuses applications.

Dans [3], l'objectif est d'une part d'étudier la stabilité de l'ensemble des points critiques de la fonctionnelle ε_∞ , et d'autre part de vérifier numériquement diverses conjectures concernant le comportement asymptotique du champ de surchauffe. En s'appuyant sur une méthode de tir développée dans [4] combinée à une méthode semi-implicite de type Runge-Kutta d'ordre 3, nous calculons les solutions de (1)-(2) quelque soit la valeur de $f_0 \in]0, 1]$. Cette étude numérique suggère qu'il existe un unique $f_0^c(\kappa)$ solution de l'équation $\sigma_\kappa(f_0) = h^{sh}(\kappa)$.

L'étude de la stabilité se ramène à l'étude du spectre d'un opérateur auto-adjoint associé au Hessien de ε_∞ , et notamment la détermination du signe de la plus petite valeur propre de cet opérateur. Le calcul numérique de cette valeur propre repose sur une méthode d'éléments finis de Hermite combinée à une méthode de Jacobi.

Les simulations numériques permettent de conjecturer qu'un point critique (f, A) est stable si $f(0) > f_0^c(\kappa)$ et instable dans le cas contraire.

Références

- [1] V. L. GINZBURG, *On the destruction and the onset of superconductivity in a magnetic field*, Trans. Soviet Physics JETP 7 (1958) p. 78-87.
- [2] C. BOLLEY AND P. DEL CASTILLO, *Existence and uniqueness for the half-space Ginzburg-Landau model*, 47 (2001) p. 135-146.
- [3] PIERRE DEL CASTILLO AND SÉRAPHIN MEFIRE, *Numerical Study of the Stability of Solutions for the Half-Space Ginzburg-Landau Model*, revised version, (2009), submitted.
- [4] CATHERINE BOLLEY AND BERNARD HELFFER, *On the continuity of the response map and an alternative shooting method for the half-space Ginzburg-Landau model*, Math. Models Methods Appl. Sci, 16 (2006) no. 9, p. 1527-1558.