

# Méthodes de projection et éléments finis non conformes

**Fanny DARDALHON**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

**Jean-Claude LATCHÉ**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

**Sebastian MINJEAUD**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

Nous proposons dans cette communication de présenter quelques résultats récents sur la discrétisation du problème de Stokes incompressible par une méthode de projection incrémentale en temps et des éléments finis non conformes de bas degré (Crouzeix-Raviart et Rannacher-Turek) en espace.

La méthode [1] permet de découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression. À chaque itération en temps, la résolution s'effectue en deux étapes :

- d'abord, une étape de prédiction de vitesse dont le principe est d'ignorer la contrainte d'incompressibilité et de choisir pour première approximation de la vitesse la solution  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$  de l'équation de quantité de mouvement où la pression est explicitée :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \nabla p^k = \mathbf{f}^{k+1}, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \mathbf{u}_{\Gamma_D}^{k+1} \text{ sur } \Gamma_D, \quad \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} \cdot \mathbf{n} - p^k \mathbf{n} = \mathbf{f}_N^{k+1} \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1)$$

- Il s'agit ensuite de projeter cette approximation de la vitesse sur l'espace à divergence nulle :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}}{\Delta t} + \nabla(p^{k+1} - p^k) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1} = 0, \\ \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_D, \quad p^{k+1} = p^k \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2)$$

Cette étape peut encore se décomposer en deux parties : calcul de l'incrément de pression  $\phi^{k+1}$  puis correction de vitesse et de pression. En effet, en prenant la divergence de la première équation, on montre que le système (2) est équivalent à :

$$\begin{cases} -\Delta \phi^{k+1} = -\frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}}{\Delta t}, \quad \nabla \phi^{k+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad \phi^{k+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ p^{k+1} = p^k + \phi^{k+1}, \quad \mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \Delta t \nabla \phi^{k+1}. \end{cases} \quad (2')$$

Les conditions aux bords sur  $\Gamma$  sont artificielles (*ie* non vérifiées par la solution du problème couplé).

Les étapes (1) et (2) sont ensuite discrétisées par des éléments finis non conformes de bas degré en utilisant une matrice masse "lumpée". L'élimination de  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  est réalisée sur le système discret pour obtenir la contrepartie discrète de (2'). On parle de méthode de projection algébrique. Il est intéressant de noter que l'opérateur discret ainsi obtenu est similaire à un Laplacien volumes finis. En outre, les conditions aux bords artificielles de l'étape (2') sont présentes dans cet opérateur, même s'il a été construit au niveau discret. Cependant ces conditions aux bords sont imposées au sens (faible) volumes finis et l'ordre d'approximation optimal en espace est toujours atteint, même en présence de conditions aux bords ouvertes, *ie* sur  $\Gamma_N$ .

Nous donnons une analyse d'erreur de ce schéma dans le cas de conditions aux bords de type Dirichlet. L'erreur de fractionnement en temps est d'ordre deux en vitesse pour la norme  $L^2$  discrète et d'ordre un en pression pour la norme  $L^2$ . Ces résultats théoriques sont illustrés par des tests numériques.

## Références

- [1] GODA, K., *A Multistep Technique with Implicit Difference Schemes for Calculating Two- or Three-Dimensional Cavity Flows*, JCP, v. 30, 1979.

**Fanny DARDALHON**, IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI, Cadarache, BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance Cedex  
fanny.dardalhon@irsn.fr

**Jean-Claude LATCHÉ**, IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI, Cadarache, BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance Cedex  
jean-claude.latche@irsn.fr

**Sebastian MINJEAUD**, IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI, Cadarache, BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance Cedex  
sebastian.minjeaud@irsn.fr