

Décomposition micro-macro pour l'équation de Vlasov

Nicolas CROUSEILLES, INRIA Nancy-Grand Est, IRMA Université de Strasbourg

Mohammed LEMOU, CNRS, IRMAR Université de Rennes I

Ce travail concerne la résolution numérique de l'équation de Vlasov-Poisson collisionnelle dans le régime de diffusion (modèle Vlasov-Poisson-BGK) et dans le régime champ fort (modèle Vlasov-Poisson-Fokker-Planck). Ces deux régimes sont difficiles à traiter d'un point de vue numérique puisque le paramètre ε qui intervient dans les équations est destiné à tendre vers zéro et impose une contrainte sur le pas de temps du type $\Delta t = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Ainsi dans la pratique, un schéma explicite est inutilisable pour explorer les limites asymptotiques.

L'objectif de ce travail est d'appliquer la méthode développée dans [1, 2, 3] aux équations de type Vlasov utilisées pour modéliser les plasmas. Cette approche est basée sur la décomposition micro-macro de l'inconnue f de l'équation de Vlasov (voir Figure 1) qui permet d'écrire une reformulation équivalente de l'équation cinétique de départ en un système couplant une équation fluide (équation macroscopique sur M) avec une équation cinétique sur la partie cinétique restante (équation microscopique sur g). L'avantage de cette approche est qu'elle permet l'obtention de schémas uniformément stables à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ grâce à une implicitation du terme raide.

L'approche est alors utilisée pour simuler l'équation de Vlasov-Poisson-BGK dans le régime de diffusion et l'équation de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck dans le régime champ fort. Dans les deux cas, à maillage fixé, il est possible d'explorer les limites $\varepsilon \rightarrow 0$. D'une part, la discrétisation semi-implicite du modèle micro-macro permet d'être consistant avec le modèle de Vlasov pour tout $\varepsilon > 0$, et d'autre part, elle dégénère en une discrétisation consistante avec le modèle limite correspondant quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans les deux régimes, même pour des données loin de l'équilibre, plusieurs résultats numériques illustrent le bon comportement et les possibilités de l'approche (voir Figure 1).

Figure 1: (gauche) Décomposition micro-macro de $f = M + g$; (milieu) Comparaison Vlasov et MM (micro-macro) pour l'énergie électrique en fonction du temps ($\varepsilon = 1$) ; (droite) Comparaison Vlasov, MM (micro-macro) et LIM (modèle limite) sur la densité en fonction de x ($\varepsilon = 10^{-2}$) à $t = 0.5 \omega_p^{-1}$.

Références

- [1] M. BENOUNE, M. LEMOU, L. MIEUSSENS, *Uniformly stable numerical schemes for the Boltzmann equation preserving the compressible Navier-Stokes asymptotics*, J. Comput. Phys. **227** pp. 3781-3803, 2008.
- [2] M. LEMOU, *Relaxed micro-macro schemes for kinetic equations*, accepté à CRAS.
- [3] M. LEMOU, L. MIEUSSENS, *A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit*, SIAM J. Sci. Comp. 31(1) 334-368, 2008.