Réduction de variance en homogénéisation stochastique: l'exemple des variables antithétiques

Ronan COSTAOUEC, CERMICS, ENPC

Claude LE BRIS, CERMICS, ENPC

Frédéric LEGOLL, UR Navier, ENPC

La détermination des propriétés macroscopiques d'un matériau possédant à l'échelle microscopique une structure aléatoire est une question délicate, objet de la théorie mathématique de l'homogénéisation stochastique. Lorsqu'on s'intéresse à des opérateurs du type $-\mathrm{div}(A(\frac{\cdot}{\epsilon},\omega)\nabla)$, sous des hypothèses de stationnarité sur A, la définition de la matrice homogénéisée $A^\star$ nécessite, comme dans le cas périodique, la résolution préalable de problèmes dits des correcteurs. La différence majeure entre homogénéisation périodique et stochastique tient à ce que, dans le dernier cas, ces problèmes sont posés sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier et non plus sur une cellule de périodicité. En pratique, ces derniers sont résolus numériquement sur un domaine tronqué $Q_N = [-N, N]^d$. On en déduit une approximation convergente $A_N^\star$ de la matrice *déterministe* $A^\star$. Cependant, à N fixé, à cause de la troncature, $A_N^\star$ est bien quant à elle *aléatoire*. Se pose donc la question du développement de méthodes de réduction de variance pour cette quantité.

Dans cette communication, les résultats issus de [1, 2] seront présentés. Une approximation alternative $\widetilde{A}_N^\star$ de la matrice homogénéisée est proposée, dont la variance est inférieure à celle de l'approximation classique $A_N^\star$. Sa construction repose sur la technique des variables antithétiques. L'efficacité de la méthode sera illustrée par des tests numériques. On quantifiera ainsi le gain en terme de coût calcul, notamment dans le cas de matériaux bidimensionnels isotropes qui correspondent à

$$A(x,\omega) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_{[k_1,k_1+1)\times[k_2,k_2+1)}(x)\ a_{(k_1,k_2)}(\omega)\mathbb{I}_2,$$

où $\left(a_{(k_1,k_2)}(\omega)\right)_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2}$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Des justifications théoriques de cette réduction de variance seront également présentées.

Références

[1] R. Costaouec, C. Le Bris et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization: proof of concept, using antithetic variables*, Rapport de recherche INRIA RR-7207, à paraître dans Boletin Soc. Esp. Mat. Apl.

[2] X. Blanc, R. Costaouec, C. Le Bris et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization: the technique of antithetic variables*, en préparation.

Ronan COSTAOUEC, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`costaour@cermics.enpc.fr`
Claude LE BRIS, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`lebris@cermics.enpc.fr`
Frédéric LEGOLL, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`legoll@lami.enpc.fr`