

Une méthode d'approximation des contrôles exactes pour les systèmes vibrantes

Nicolae Cîdea, Université Henri Poincaré Nancy 1

Sorin Micu, University of Craiova

Marius Tucsnak, Université Henri Poincaré Nancy 1

Le but de ce travail est de proposer une nouvelle méthode numérique pour le calcul des contrôles exactes pour une classe des systèmes infini-dimensionnels modélisant les vibrations élastiques. Notre résultat principal donne le taux de convergence des nos approximations à un contrôle exacte. De plus, pour illustrer l'efficacité de cette méthode on l'applique à certains systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles et on décrit les simulations numériques associées. Notre méthodologie combine le principe de Russell "stabilité implique contrôlabilité" [1] avec des estimations d'erreur pour les approximations par éléments finis des systèmes infini-dimensionnels considérés.

Soient H et U deux espaces de Hilbert. Soit $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow H$ un opérateur autoadjoint, strictement positif, avec des résolvantes compactes et soit $B_0 \in \mathcal{L}(U, H)$ un opérateur de contrôle borné. On note H_α le domaine de l'opérateur A_0^α muni de la norme du graphe. Notre objectif est de calculer un contrôle exacte pour des systèmes de la forme

$$\ddot{q}(t) + A_0 q(t) + B_0 u(t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = q_1, \quad (2)$$

où, l'on suppose que le système (1)-(2) est exactement contrôlable en temps $\tau > 0$. Pour décrire la méthode d'approximation nous considérons $(U_h)_{h>0}, (V_h)_{h>0}$ deux familles de sous-espaces de dimension finie de U , et respectivement H , et notons $A_{0h} \in \mathcal{L}(V_h), B_{0h} \in \mathcal{L}(U_h, V_h)$ les opérateurs en dimension finie approchant A_0 et B_0 . Notre méthode itérative est décrite, pour tout $h > 0$ et $n \geq 1$, par

$$\ddot{w}_h^n(t) + A_{0h} w_h^n(t) + B_{0h} B_{0h}^* \dot{w}_h^n(t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

$$w_h^n(0) = \begin{cases} \pi_h q_0, & \text{if } n = 1 \\ w_{b,h}^{n-1}(0), & \text{if } n > 1 \end{cases} \quad \dot{w}_h^n(0) = \begin{cases} \pi_h q_1, & \text{if } n = 1 \\ \dot{w}_{b,h}^{n-1}(0), & \text{if } n > 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$\ddot{w}_{b,h}^n(t) + A_{0h} w_{b,h}^n(t) - B_{0h} B_{0h}^* \dot{w}_{b,h}^n(t) = 0 \quad (t \leq \tau) \quad (5)$$

$$w_{b,h}^n(\tau) = w_h^n(\tau), \quad \dot{w}_{b,h}^n(\tau) = \dot{w}_h^n(\tau), \quad (6)$$

où nous avons noté π_h le projecteur orthogonal de $H_{\frac{1}{2}}$ sur V_h . Pour $h > 0$ on fixe $N(h) \in \mathbb{N}$ et on pose

$$\begin{bmatrix} w_{0h} \\ w_{1h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_h q_0 \\ \pi_h q_1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{N(h)} \begin{bmatrix} w_{b,h}^n(0) \\ \dot{w}_{b,h}^n(0) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Avec ces notations, $u_h = B_{0h}^* \dot{w}_h^{(1)} + B_{0h}^* \dot{w}_{b,h}^{(1)}$ est une approximation d'un contrôle exacte u de (1)-(2), où $w_h^{(1)}$ et $w_{b,h}^{(1)}$ sont les solutions de système (3)-(6) avec la donnée initiale (4) remplacée par $w_h^{(1)}(0) = w_{0h}$, $\dot{w}_h^{(1)}(0) = w_{1h}$ et $\begin{bmatrix} w_{0h} \\ w_{1h} \end{bmatrix}$ donné par (7). Le résultat principal de ce travail donne une estimation de l'erreur commise entre u et u_h . Plus précisément, pour chaque donnée initiale $\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} \in H_{\frac{3}{2}} \times H_1$ il existe $\theta > 0$, $C_\tau > 0$ et $h^* > 0$ tels que

$$\|u - u_h\|_{C([0,\tau],U)} \leq Ch^\theta \ln^2(h^{-1}) \left\| \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} \right\|_{H_{\frac{3}{2}} \times H_1} \quad (h < h^*).$$

Références

- [1] D.L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, SIAM Rev., Vol. 20: 639–739, 1978.

Nicolae Cîdea, Institut Elie Cartan, Nancy Université, BP 70239, 54506, Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

Nicolae.Cindea@iecn.u-nancy.fr

Sorin Micu, Department of Mathematics, University of Craiova, Craiova, 200585, Romania.

sd_micu@yahoo.com

Marius Tucsnak, Institut Elie Cartan, Nancy Université, BP 70239, 54506, Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

Marius.Tucsnak@iecn.u-nancy.fr