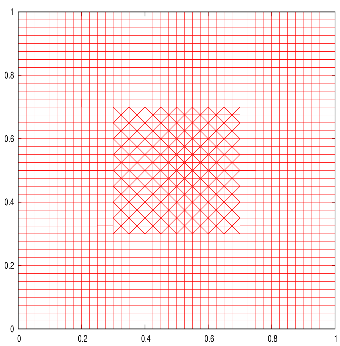
Étude préliminaire d'une méthode Galerkin discontinue en maillages multi-éléments pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires

Clément DUROCHAT, INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée

L'objectif de cette étude est de formuler, analyser et valider une méthode Galerkin discontinue pour résoudre numériquement les équations de Maxwell instationnaires [1] sur des maillages hybrides tétraédriques / hexaédriques en 3D (triangulaires / quadrangulaires en 2D), que l'on appelle méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$. Comme dans plusieurs travaux déjà réalisés sur différentes méthodes hybrides [2], notre motivation est de mailler des objets ayant une géométrie complexe avec des tétraèdres, afin de discrétiser avec précision et mailler le reste du domaine (le vide environnant) à l'aide d'hexaèdres pour optimiser le temps de calcul.

Dans la méthode **GD** considérée, nous utilisons un flux centré pour approcher les intégrales de surface et un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton d'ordre deux. Nous faisons l'étude de stabilité 3D de cette méthode en montrant qu'elle conserve une énergie discrète et en exhibant une condition suffisante de stabilité. Le résultat alors obtenu (démontré dans [3]) est qu'en appelant Δt_τ le pas de temps sur la partie tétraédrique et Δt_q celui sur la partie hexaédrique, il suffit que le pas de temps global Δt soit tel que : $\Delta t = \min(\Delta t_\tau, \Delta t_q)$. Nous étudions ensuite le cas test numérique 2D (ondes TM_z) de l'évolution d'un mode dans une cavité métallique carrée. Les résulats des tests réalisés pour $p = 0, ..., 2$ et $k = 0, ..., 2$ sur le maillage hybride montré sont rapportés dans le tableau ci-dessous.



	Temps CPU	# *d.d.l.*	Erreur L^2 finale
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$	9.7 s	1856	9.17×10^{-2}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$	64.0 s	5888	3.23×10^{-2}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$	395.0 s	12608	1.05×10^{-1}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$	38.2 s	2880	2.10×10^{-1}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$	95.0 s	6912	4.53×10^{-2}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$	414.0 s	13632	2.20×10^{-2}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$	129.0 s	4416	1.95×10^{-1}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$	238.0 s	8448	2.09×10^{-2}
$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$	531.0 s	15168	2.70×10^{-3}

L'hybridation $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ est ici la plus précise mais avec un temps CPU relativement long; les cas $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ semblent très intéressants, ils offrent une excellente précision pour des temps CPU bien réduits par rapport à $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$. Des tests réalisés [3] sur un maillage tout triangulaire de même raffinement, montrent que $\mathbb{P}_1$ donne une erreur finale de 5×10^{-2} en 127 s, et $\mathbb{P}_2$ une erreur finale 2.5×10^{-3} pour 601 s. $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ ont certes une erreur plus grande que $\mathbb{P}_2$ mais tout de même très correcte (2.5 fois plus petite que $\mathbb{P}_1$), et s'effectuent surtout en des temps CPU diminués environ de moitié par rapport à $\mathbb{P}_2$.

Le but de cette étude est essentiellement axé sur la validation de cette méthode hybride dont nous pouvons commencer à percevoir l'intérêt notamment pour $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ qui semblent offrir des compromis precision/temps CPU prometteurs. D'autres tests réalisés dans [3] montrent de plus la convergence numérique en h, ainsi que la conservation de l'énergie au cours du temps pour chacune des hybridations.

Références

[1] J. S. Hesthaven, T. Warburton, *Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell's equations*, J. Comput. Phys., 181 (1), p. 186-221 (2002).

[2] Salvador G. Garcia, M. Fernandez Pantoja, C. M. de Jong van Coevorden, A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, *A new hybrid DGTD/FDTD method in 2-D*, IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol. 18, no. 12, p. 764-766 (Déc. 2008)

[3] C. Durochat, S. Lanteri, *Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*, Rapport de Recherche INRIA, à paraître.

Clément DUROCHAT, équipe-projet NACHOS, centre de recherche INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée.
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex
`Clement.Durochat@sophia.inria.fr`