

Éléments finis d'ordre élevé pour la résolution des équations de Maxwell harmoniques en géométrie axisymétrique.

Sébastien CAMBON, CEA/DAM/CESTA

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, ENSTA/CERFACS

Francis COLLINO, CERFACS/Consultant researcher

Patrick LACOSTE, CEA/DAM/CESTA

La modélisation des équations de Maxwell harmoniques en milieu non borné et pour des géométries à symétrie de révolution tient une part importante dans les études de furtivité. Notre approche consiste à coupler une méthode d'équations intégrales pour le domaine extérieur aux équations de Maxwell d'ordre deux en volume. La formulation variationnelle associée à cette approche a été introduite et étudiée pour la première fois dans [1, 2] pour des géométries dans \mathbb{R}^3 , et fait intervenir les potentiels suivants :

$$\tilde{T}J(x) = k \int_{\Gamma} G(k, x, y) J(y) d\Gamma(y) + \frac{1}{k} \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_x G(k, x, y) \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) d\Gamma(y), \text{ et } \tilde{K}J(x) = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_y G(x, y) \times J(y) d\Gamma(y)$$

où $G(k, x, y)$ est le noyau de Green associé à la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz en 3D. Cette formulation est traduite en axisymétrique par passage aux coordonnées cylindriques, permettant de décomposer les inconnues en série de Fourier dans la base associée comme suit :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_r^0 \\ e_{\theta}^0 \\ e_z^0 \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} e_r^n \cos(n\theta) \\ e_{\theta}^n \sin(n\theta) \\ e_z^n \cos(n\theta) \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} e^{-n} \sin(n\theta) \\ e^{-n} \cos(n\theta) \\ e^{-n} \sin(n\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Pour chaque mode de Fourier, la partie volumique dans le plan méridien noté $O \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de frontière notée γ est alors :

$$\int_O \left(k \varepsilon_r^- \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' + \frac{1}{k \mu_r} \operatorname{rot}_r \mathbf{e} \cdot \operatorname{rot}_r \mathbf{e}' \right) r dr dz \text{ avec } \operatorname{rot}_r \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \left(n e_z^n + \frac{\partial(r e_{\theta}^n)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial e_r^n}{\partial z} - \frac{\partial e_z^n}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(n e_r^n + \frac{\partial(r e_{\theta}^n)}{\partial r} \right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

On est donc amené à considérer comme espace de solutions en coordonnées cylindriques :

$$\mathcal{H}_{1, \operatorname{rot}_r}(O) = \{ \sqrt{r} \mathbf{e} \in \mathbf{L}^2(O) : \sqrt{r} \operatorname{rot}_r \mathbf{e} \in \mathbf{L}^2(O) \} \text{ et } \mathcal{H}_{1, \operatorname{div}}(\gamma) = \{ r \mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\gamma) : r \operatorname{div}_{\gamma} \mathbf{q} \in L^2(\gamma) \}$$

Pour chaque mode de Fourier, en considérant le changement d'inconnue (3), nous montrerons comment il est possible de construire une méthode d'éléments finis d'ordre élevé conforme dans $\mathcal{H}_{1, \operatorname{rot}_r}(O)$ dont la trace tangentielle induit une méthode d'éléments finis surfaciques conforme dans $\mathcal{H}_{1, \operatorname{div}}(\gamma)$.

$$\mathbf{U}^n = \frac{1}{r} \left(n \begin{pmatrix} e_r^n \\ e_z^n \end{pmatrix} + \nabla(r e_{\theta}^n) \right) \text{ et } \mathbf{U}^0 = \begin{pmatrix} e_r^0 \\ e_{\theta}^0 \\ e_z^0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On montrera par l'expérimentation numérique que le choix des éléments finis de type Nédélec conforme dans $H(\operatorname{rot}, O)$ pour \mathbf{U}^n donné par [3], et de type Lagrange conforme dans $H^1(O)$ pour e_{θ}^n est adapté à la résolution du système couplé quel que soit l'ordre des éléments finis. On présentera aussi la validation numérique de la partie équation intégrale en prenant appui sur les travaux [4]. Enfin, des résultats de S.E.R sur diverses géométries (métallique, diélectrique avec ou sans noyau conducteur) seront présentés ainsi qu'une comparaison entre les différents ordres de la méthode d'éléments finis.

Références

- [1] V.LEVILLAIN, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.*, Thèse, École Polytechnique, 1991.
- [2] J.GAY, Y.HAUGAZEAU, *Structure symétrique pour les systèmes de Maxwell couplés entre éléments finis et équations intégrales.*, Rapport CESTA/SI numéro 97, 1991
- [3] J-C.NEDELEC, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 .*, Numer. Math. 35, 1980.
- [4] F.COLLINO, *Iterative Methods and Integral Equations for Electromagnetism: A Systematic Study for Spherical Geometry.*, Rapport d'étude C.E.A, 2008.