

# Une nouvelle approche de type équation modifiée pour des discrétisations d'ordre élevé en espace et en temps de l'équation des ondes

Cyril AGUT, LMA PAU - Equipe-projet INRIA Magique-3D

Julien DIAZ, Equipe-projet INRIA Magique-3D - LMA PAU

L'obtention d'une approximation de la solution de l'équation des ondes nécessite un important coût de calcul surtout lorsque l'on utilise des méthodes de discrétisation en espace de haut degré. De plus, si l'on utilise des méthodes de discrétisation en temps explicites (comme le schéma saute-mouton), le pas de temps doit vérifier une condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy) pour assurer la stabilité du schéma. Plus le pas d'espace est petit, plus la condition CFL ainsi que le nombre d'itérations seront grands. Pour améliorer la précision du schéma saute-mouton, nous pouvons considérer la technique de l'équation modifiée [1, 4] qui permet d'obtenir des schémas explicites d'ordre pair en temps. Le prix à payer est l'apparition de  $p$  multiplications matricielles à chaque pas de temps alors que le schéma saute-mouton n'en requiert qu'une seule, mais la condition CFL est multipliée par  $\alpha_p \geq 1$ . Pour  $p = 2$  (schéma d'ordre 4),  $\alpha_2 = 1.7$  donc les coûts de calcul supplémentaires sont faibles par rapport au schéma d'ordre 2. Par contre, pour des schémas d'ordre plus élevés, l'augmentation de la condition CFL ne suffit pas à compenser le nombre de multiplications supplémentaires. Récemment, une méthode a été proposée par Gilbert et Joly [2] pour optimiser les coefficients  $\alpha_p$  mais elle requiert encore plus de multiplications matricielles. Dans ce travail, nous appliquons la technique de l'équation modifiée d'une nouvelle façon en inversant l'ordre classique de discrétisation. En effet, nous considérons dans un premier temps la discrétisation en temps, *via* la technique de l'équation modifiée, puis la discrétisation en espace. Après la discrétisation en temps, un opérateur  $p$ -Laplacien apparaît ce qui nous conduit à considérer des éléments finis  $C^{p-1}$ . Ici, nous avons choisi de discrétiser l'opérateur du second ordre par une méthode de Galerkin discontinue avec pénalité intérieure [3] et nous présenterons comment étendre cette méthode pour discrétiser les opérateurs d'ordre plus élevé. Des résultats numériques en dimension 1 et 2 illustreront la performance des schémas d'ordre 4 et 6 et nous montrerons que cette nouvelle technique permet aisément de considérer des éléments d'ordre différent au sein d'un même maillage.

## Références

- [1] M. A. DABLAIN, *The application of high order differencing for the scalar wave equation*, Geophysics, 51:54-56, 1.
- [2] J. C. GILBERT, AND P. JOLY, *Higher order time stepping for second order hyperbolic problems and optimal cfl conditions*, SIAM Numerical Analysis and Scientific Computing for PDE's and their Challenging Applications, références, 2006.
- [3] M. J. GROTE, A. SCHNEEBELI, AND D. SCHÖTZAU, *Discontinuous galerkin finite element method for the wave equation*, SIAM J. on Numerical Analysis, 44:2408-2431, 2006.
- [4] G. R. SHUBIN AND J. B. BELL, *A modified equation approach to constructing fourth-order methods for acoustic wave propagation*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 8:135-151, 1987.

Cyril AGUT, LMA PAU - Equipe-projet INRIA Magique-3D  
Bâtiment B1, Avenue de l'Université, 64013 Pau Cedex  
Tel : +33 5 40 17 51 51  
cyril.agut@inria.fr

Julien DIAZ, Equipe-projet INRIA Magique-3D - LMA PAU  
Bâtiment B1, Avenue de l'Université, 64013 Pau Cedex  
Tel : +33 5 40 17 51 57  
julien.diaz@inria.fr