Méthode de volumes finis sur maillages quelconques pour les probleme parabolique dégeneré de reaction-convection-diffusion

Konstantin BRENNER, Université de Paris-Sud 11

Ophlie ANGELINI, EDF R&D Clamart

Danielle HILHORST, CNRS et Université de Paris-Sud 11

Nous nous intéressons à la résolution numérique d'une équation parabolique dégénérée de la forme

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla\varphi(s)) + \nabla \cdot (\mathbf{V}f(s)) + \mathcal{F}(s) = q, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{1}$$

où les dérivées des fonctions φ et f s'annulent en un nombre fini de valeurs. On suppose de plus que φ et f sont des fonctions croissantes.

On étudie deux applications de l'équation (1) à des problèmes géologiques. On considère tout d'abord le cas où $\varphi = f$, ce qui permet d'introduire la nouvelle fonction inconnue $u = \phi(s)$ (soit $s = \beta(u)$). Dans ce cas, l'équation (1) est de la forme

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{V}u) + F(u) = q, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T. \tag{2}$$

L'équation (2) modélise le transport de contaminants dans des nappes aquifères. Nous proposons un schéma numérique qui s'appuie sur la méthode des volumes finis sur maillages quelconques introduite récemment par [3]. Elle permet la résolution numérique de l'équation (2), où le tenseur de diffusion $\mathbf{K}$ est anisotrope et hétérogène, sur des maillages tridimensionnels très généraux. Nous démontrons dans [1] la convergence de la solution approchée vers une solution exacte de l'équation (1), dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogène. Nous montrons également les résultats de tests numériques en dimension trois d'espace.

Nous nous intéressons ensuite à la résolution numérique d'un système d'équations décrivant un écoulement diphasique en milieu poreux. Plus précisément nous considérons le système

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda(s)\mathbf{K}\nabla p) = q_w + q_n \\ \mathbf{u} = -\lambda(s)\mathbf{K}\nabla p \\ \omega \dfrac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}f(s)) - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla\varphi(s)) = q_n, \end{cases} \tag{3}$$

où s est la saturation d'une phase non-mouillante et P est la pression globale [2]. On remarque que la première équation est uniformément elliptique en la pression P, tandis que la deuxième, qui est de la forme (1), est parabolique dégénérée en la saturation s. Nous montrons comment on peut étendre la méthode proposée pour la résolution de l'équation scalaire (1) au système (3).

Références

[1] O. Angelini, K. Brenner, D. Hilhorst, A finite volume method on general meshes for a degenerate parabolic convection-reaction-diffusion equation, to appear

[2] G. Chavent, J. Jaffré, Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. Studies in Mathematics and its applications, 1986.

[3] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI: a scheme using stabilization and hybrid interfaces, to appear in IMA J. of Num. Anal..

Konstantin BRENNER, Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris-Sud 11, -91405 Orsay, France
`konstantin.brenner@math.u-psud.fr`
Ophlie ANGELINI, EDF R&D, 1 avenue du Gnral de Gaulle 92141 Clamart, France
`ophelie-externe.angelini@edf.fr`
Danielle HILHORST, Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris-Sud 11, 91405 Orsay, France
`Danielle.Hilhorst@math.u-psud.fr`