

Modélisation mathématique et numérique des mouvements de foule

Juliette Venel

Laboratoire de Mathématiques,
Bât. 425, Université Paris-Sud, Orsay.

CANUM
Saint Jean de Monts, le 26 Mai 2008

Modèle

Vitesse souhaitée

Vitesse réelle

Cadre

Mathématique

Cône normal sortant

Inclusion
différentielle

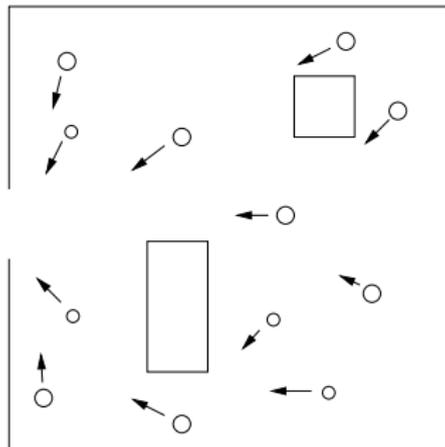
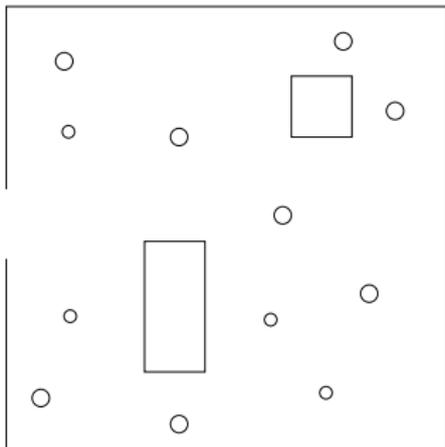
Schéma
numérique

Présentation

Convergence

Perspectives

Introduction



Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre
Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma
numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

Plan

- 1 **Présentation du modèle**
Vitesse souhaitée
Vitesse réelle
- 2 **Cadre Mathématique**
Cône normal sortant
Inclusion différentielle
- 3 **Schéma numérique**
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 **Perspectives**

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

- 1 **Présentation du modèle**
Vitesse souhaitée
Vitesse réelle
- 2 Cadre Mathématique
Cône normal sortant
Inclusion différentielle
- 3 Schéma numérique
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 Perspectives

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre

Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

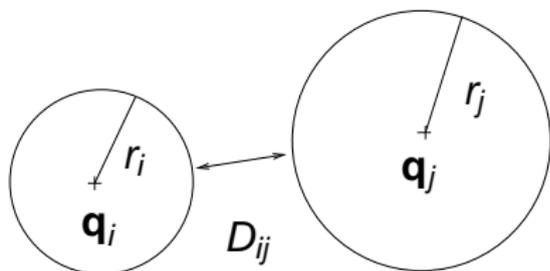
Schéma

numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

Notations



$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

Ensemble de configurations admissibles

$$Q_0 = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| - r_i - r_j \geq 0 \right\}$$

Vitesse souhaitée

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (\mathbf{U}_1(\mathbf{q}), \mathbf{U}_2(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{U}_N(\mathbf{q}))$$

Modèle

Vitesse souhaitée

Vitesse réelle

Cadre

Mathématique

Cône normal sortant

Inclusion
différentielle

Schéma

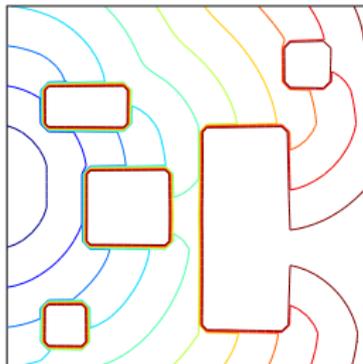
numérique

Présentation

Convergence

Perspectives

Exemple : $\mathbf{U}_i(\mathbf{q}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{q}_i) = -\nabla D(\mathbf{q}_i)$, où $D(\mathbf{x})$ est la distance géodésique entre la sortie et le point \mathbf{x} .



Lignes de niveau de la fonction \mathcal{D}

Vitesse réelle

Pour gérer les contacts, on définit

Cône des vitesses admissibles

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \right\},$$

où $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q})$.

En notant \mathbf{u} la vitesse réelle des N personnes, notre modèle s'écrit

Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \int \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = P_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}. \end{cases}$$

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

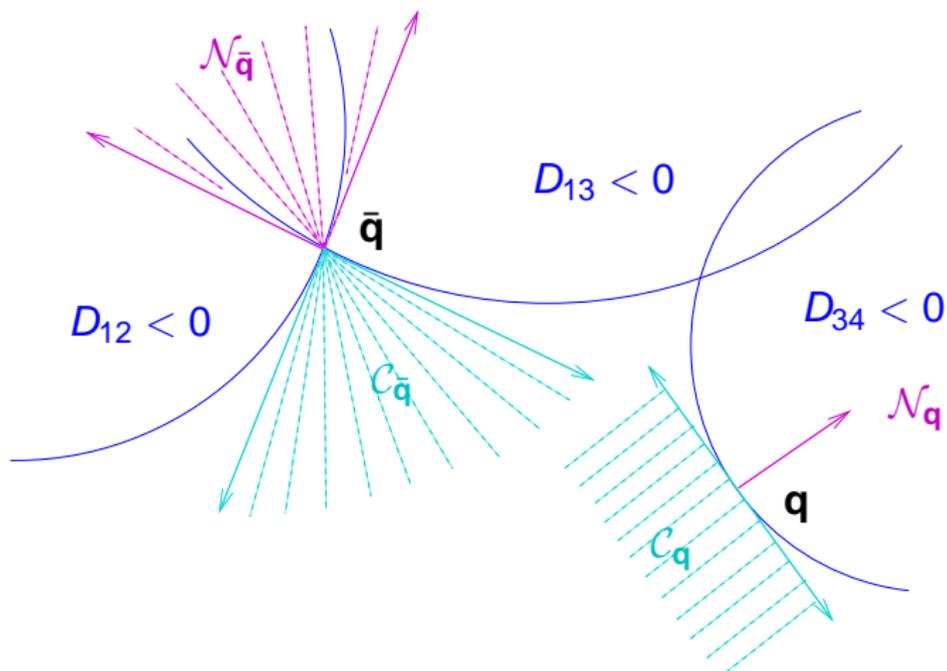
- 1 Présentation du modèle
Vitesse souhaitée
Vitesse réelle
- 2 **Cadre Mathématique**
Cône normal sortant
Inclusion différentielle
- 3 Schéma numérique
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 Perspectives

Cône \mathcal{N}_q

On introduit \mathcal{N}_q le cône polaire de \mathcal{C}_q

Définition

$$\mathcal{N}_q = \mathcal{C}_q^\circ = \{ \mathbf{w}, (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_q \}.$$



Cône $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$

$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est appelé **cône normal sortant** et s'écrit comme suit

Caractérisation

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \left\{ - \sum \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}), \lambda_{ij} \geq 0, D_{ij}(\mathbf{q}) > 0 \implies \lambda_{ij} = 0 \right\}.$$

Lorsque deux cônes sont mutuellement polaires, la propriété suivante est vérifiée

Propriété

$$P_{C_{\mathbf{q}}} + P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} = \text{Id.}$$

Réécriture du modèle

D'après la propriété précédente, on a

$$\dot{\mathbf{q}} = P_{C_{\mathbf{q}}}(\mathbf{U}(\mathbf{q})) = \mathbf{U}(\mathbf{q}) - P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\mathbf{U}(\mathbf{q})),$$

ce qui est équivalent à

$$\dot{\mathbf{q}} + P_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\mathbf{U}(\mathbf{q})) = \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

D'où

$$\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Le problème prend alors la forme d'une inclusion différentielle du premier ordre.

Modèle

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

Etude théorique

Cas d'un mouvement rectiligne

$Q_0 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i \geq r_{i+1} + r_i\}$ est un **convexe** fermé

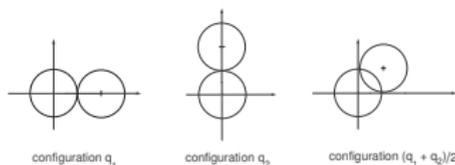
$\Rightarrow \mathcal{N}$ est un opérateur **maximal monotone** ($\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \partial I_{Q_0}(\mathbf{q})$)

\Rightarrow existence et unicité d'une solution

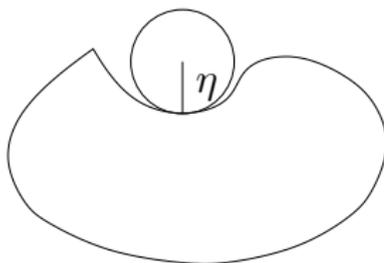
Généralisation pour des déplacements dans le plan ?

◇ défaut de convexité de Q_0

◇ absence de monotonie de \mathcal{N}



Notion de prox-régularité



Ensemble prox-régulier

Soit S un ensemble fermé,

S est η -prox-régulier si pour tout point $\tilde{\mathbf{q}}$ à distance $d < \eta$ de S , la **projection** de $\tilde{\mathbf{q}}$ sur S est **bien définie**.

Proposition

Q_0 est η -prox-régulier avec $\eta = \eta(N, r_i)$.

Problème bien posé

Théorème

On suppose \mathbf{U} Lipschitz.

Alors quel que soit \mathbf{q}_0 dans Q_0 , il existe une unique fonction \mathbf{q} absolument continue vérifiant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \text{ pp sur }]0, T[, \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

La démonstration utilise des résultats récents sur les processus de rafle de J-F. Edmond et L. Thibault (2006).

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

- 1 **Présentation du modèle**
Vitesse souhaitée
Vitesse réelle
- 2 **Cadre Mathématique**
Cône normal sortant
Inclusion différentielle
- 3 **Schéma numérique**
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 **Perspectives**

Schéma numérique

Initialisation : $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}_0$

Boucle en temps : \mathbf{q}^n connu

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h \mathbf{u}^n$$

$$\mathbf{u}^n = P_{C_h(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{U}(\mathbf{q}^n))$$

$$\text{où } C_h(\mathbf{q}^n) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \right\}.$$

Si l'on interprète cet algorithme en terme de position, on a

$$\mathbf{q}^{n+1} = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n))$$

$$\text{où } K(\mathbf{q}^n) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}^n) + \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}^n) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^n) \geq 0 \right\}.$$

Problèmes continu et discret

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre

Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma

numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

En notant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q})$, le problème continu s'écrit

$$\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Le problème discret associé à l'algorithme précédent est

$$\mathbf{u}^n + \mathbf{N}(K(\mathbf{q}^n), \mathbf{q}^{n+1}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}^n).$$

Idée : $\mathbf{N}(Q_0, \mathbf{q}) = \mathbf{N}(K(\mathbf{q}), \mathbf{q}) \approx \mathbf{N}(K(\mathbf{q}^n), \mathbf{q}^{n+1})$.

Convergence

On note \mathbf{q}_h la fonction continue affine par morceaux associée au schéma numérique.

Théorème

On suppose \mathbf{U} Lipschitz.

Alors \mathbf{q}_h converge uniformément sur $[0, T]$ vers la fonction \mathbf{q} vérifiant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0. \end{cases}$$

Modèle

Vitesse souhaitée
Vitesse réelle

Cadre Mathématique

Cône normal sortant
Inclusion
différentielle

Schéma numérique

Présentation
Convergence

Perspectives

- 1 Présentation du modèle
Vitesse souhaitée
Vitesse réelle
- 2 Cadre Mathématique
Cône normal sortant
Inclusion différentielle
- 3 Schéma numérique
Présentation du schéma
Résultat de convergence
- 4 Perspectives

Perspectives

- Problèmes théoriques liés à la présence d'obstacles
- Programmation en C++
- Comparaison avec des données réelles

Projection sur un convexe fermé

On considère H un espace de Hilbert et S un convexe fermé inclus dans H .

Proposition

On a l'équivalence suivante

$$x = P_S(y) \Leftrightarrow y - x \in N(S, x)$$

Comme

$$\mathbf{q}^{n+1} = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n)),$$

alors

$$\mathbf{q}^n + h \mathbf{U}(\mathbf{q}^n) - \mathbf{q}^{n+1} \in N(K(\mathbf{q}^n), \mathbf{q}^{n+1}).$$

Finalement en divisant par h , on obtient

$$-\mathbf{u}^n + \mathbf{U}(\mathbf{q}^n) \in N(K(\mathbf{q}^n), \mathbf{q}^{n+1}).$$

Idée de la preuve de convergence

Proposition

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = N(Q_0, \mathbf{q}) = N(K(\mathbf{q}), \mathbf{q})$$

Lemme

Soient \mathbf{q} , $\tilde{\mathbf{q}} \in Q_0$ et $\mathbf{q}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{q}$, on définit

$$\mathbf{p} = P_{K(\mathbf{q})}(\tilde{\mathbf{q}}) \text{ et } \mathbf{p}^n = P_{K(\mathbf{q}^n)}(\tilde{\mathbf{q}}).$$

Alors il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{q}} \in B(\mathbf{q}, \nu)$,

$$\mathbf{p}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{p}.$$