# Nager dans un fluide parfait

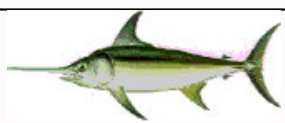
Alexandre Munnier

Maître de conférences
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré
NANCY, France
Projet CORIDA, INRIA Lorraine

Mai 2008

# Motivations

## Vitesses de quelques poissons communs

| | | |
|---|---|---|
| Harreng |  | $6\,km/h$ |
| Truite |  | $6\,km/h$ |
| Carpe |  | $6\,km/h$ |
| Maquereau |  | $11\,km/h$ |
| Thon |  | $80\,km/h$ |
| Espadon |  | $96\,km/h$ |

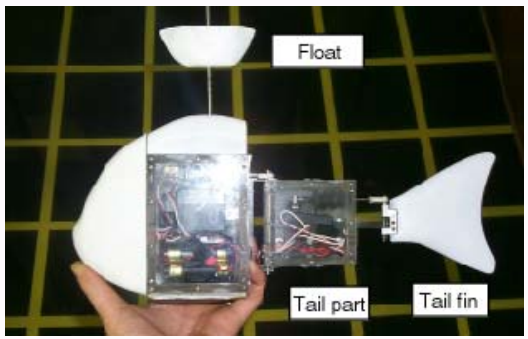
Des performances remarquables en termes de vitesse, d'accélération mais aussi de rendement, de manœuvrabilité et de furtivité.

# Motivations

## Biohydrodynamique

Étude de la locomotion des animaux par interaction avec un fluide (organismes unicellulaires, animaux aquatiques, oiseaux).

Quelques robots expérimentaux (déjà anciens).








## D'un point de vue mathématique

- Modélisation : déterminer les équations du mouvement
- Étude mathématiques de ces modèles (existence de solutions)
- Simulations numériques et contrôle.

# Notes bibliographiques



H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Mathematical Library, 1830.


G. P. Galdi, *On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 1999.


E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley et J. B. Melli-Huber, *Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid*, Journal of Nonlinear Science, 2005.


J. San Martin, J. F. Scheid, T. Takahashi et M. Tucsnak, *An initial and boundary problem modeling fish-like swimming*, Arch. Ration. Mech. Anal., 2008.

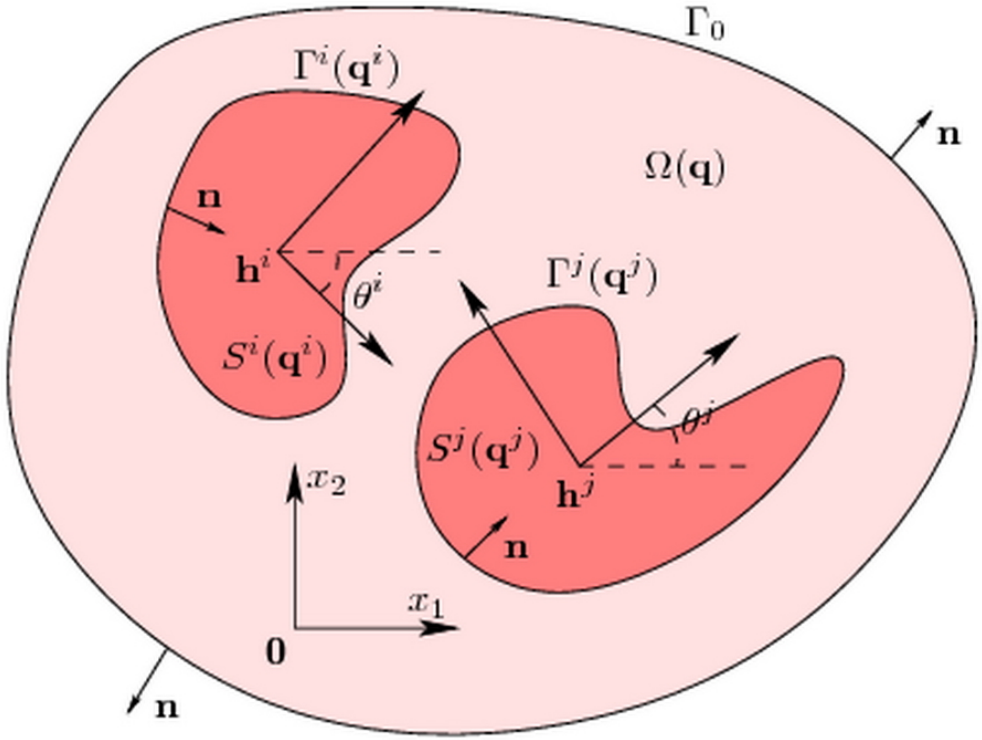

J. Houot et A. M., *On the motion and collisions of rigid bodies in an ideal fluid*, Asymptot. Anal., 2008.


A. M. *On the self displacement of deformable bodies in a potential fluid flow*, Math. Model. Num. Anal., 2008.


F. Alouges, A. Lefebvre et A. DeSimone, *Swimming at low reynolds number at optimal strokes : An example*, J. of. Non Linear Science, 2008.

# Modélisation de $n$ solides dans un fluide parfait

Le système fluide-solides a $3n$ degrés de liberté.




## Pour chaque solide $S^i$ on note :

- $\mathbf{h}^i := (h_1^i, h_2^i)^T$ les coordonnées de son centre de gravité
- $\theta^i$ son orientation.

## Coordonnées généralisées :

- $\mathbf{q}^i := (h_1^i, h_2^i, \theta^i)^T$
- $\mathbf{q} := (\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \ldots, \mathbf{q}^n)^T$
- $\dot{\mathbf{q}}^i$ et $\dot{\mathbf{q}}$.

# Vitesse eulérienne, potentiel

La vitesse eulérienne du $i$ème solide est :

$$\mathbf{v}^i := \dot{\theta}^i(\mathbf{x} - \mathbf{h}^i)^\perp + \dot{\mathbf{h}}^i.$$

Pour chaque degré de liberté $q^i_j$, on introduit une fonction potentiel $\varphi^i_j$, ($i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, 2, 3$) telle que $-\Delta\varphi^i_j = 0$ dans $\Omega(\mathbf{q})$ et :

$$\frac{\partial\varphi^i_1}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma^i(\mathbf{q}^i), \qquad \frac{\partial\varphi^i_2}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma^i(\mathbf{q}^i),$$

$$\frac{\partial\varphi^i_3}{\partial\mathbf{n}} = (\mathbf{x} - \mathbf{h}^i)^\perp \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma^i(\mathbf{q}^i), \qquad \frac{\partial\varphi^i_j}{\partial\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup_{k\neq i} \Gamma^k(\mathbf{q}^k).$$

Selon la loi de Kirchhoff, la vitesse eulérienne du fluide s'écrit :

$$\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} \dot{\mathbf{q}}^i_j \nabla\varphi^i_j.$$

Les conditions aux limites pour les fonctions $\varphi^i_j$ entraînent que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma^i(\mathbf{q}^i) \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

Comme pour les variables généralisées, on introduit $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1, \ldots, \varphi_1^n, \varphi_2^n, \varphi_3^n)^T$, ainsi que sa matrice Jacobienne $(3n \times 2)$, notée $[D\boldsymbol{\varphi}]$.

**La matrice de masse ajoutée est définie par :**

$$[M_F(\mathbf{q})] := \rho_F \int_{\Omega(\mathbf{q})} [D\boldsymbol{\varphi}][D\boldsymbol{\varphi}]^T \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \rho_F : \text{densité du fluide.}$$

Ses cœfficients sont donnés par :

$$\rho_F \int_{\Omega(\mathbf{q})} \nabla\varphi_j^i \nabla\varphi_l^k \mathrm{d}\mathbf{x} = \rho_F \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma^i(\mathbf{q})} \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial \mathbf{n}} \varphi_l^k \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma^k(\mathbf{q})} \frac{\partial \varphi_l^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_j^i \mathrm{d}\Gamma \right).$$

L'expression de la matrice de masse ajoutée dépend uniquement des valeurs des potentiels sur le bord des solides.

Introduisons :

- $m^i$ la masse du solide $S^i$,
- $J^i$ son moment d'inertie,
- ainsi que la matrice : $[M_S] := \text{diag}(m^1, m^1, J^1, \ldots, m^n, m^n, J^n)$.

**La matrice de masse virtuelle est définie par :**

$$[M(\mathbf{q})] = [M_S] + [M_F(\mathbf{q})].$$

Supposons, pour simplifier, que le Lagrangian coïncide avec l'énergie cinétique du système :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot [M(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}.$$

Remarque : d'autres forces peuvent êtres considérées dans ce modèle (poussée d'Archimède).

# Equations du mouvement des solides

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent, en mécanique Lagrangienne :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}.$$

Dans cette expression :

- Le calcul de $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{\mathbf{q}}$ est élémentaire.
- La détermination de $\partial \mathcal{L}/\partial \mathbf{q}$ nécessite de dériver la solution d'un problème de Neumann en fonction du domaine (dérivée de forme).

On observe le point capital suivant :

Les expressions des dérivées de forme des potentiels ne font intervenir que les valeurs de ces potentiels sur les bords des solides.

## Equations du mouvement

$$([M_S]+[M_F(\mathbf{q})])\ddot{\mathbf{q}}+\langle\partial_{\mathbf{q}}[M_F(\mathbf{q})],\dot{\mathbf{q}}\rangle\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T[M_F(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{0}. \quad \text{(EM)}$$

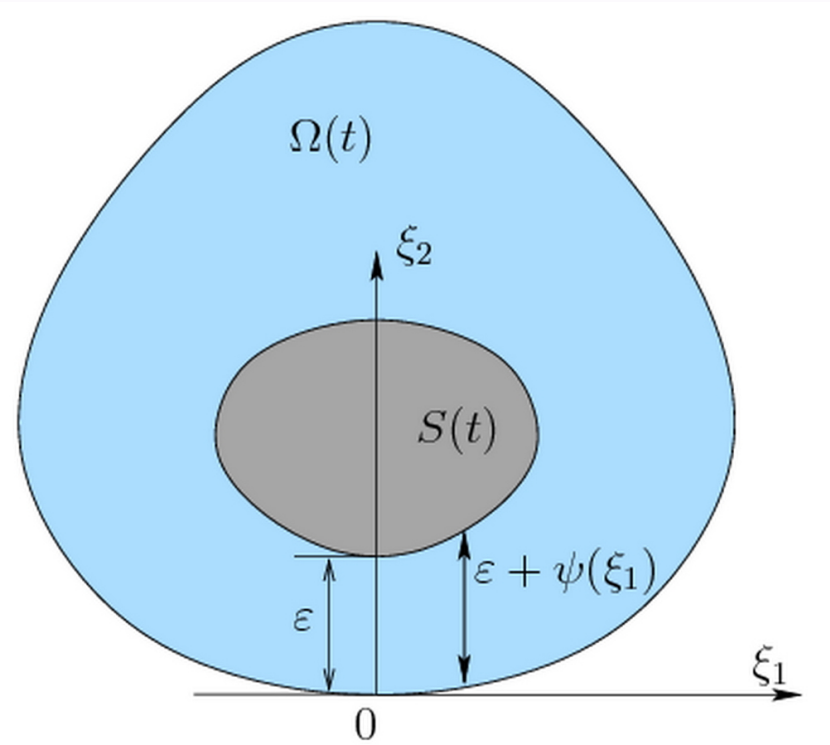
On peut alors montrer :

## Theorem (A. M. 2007)

*Supposons que tous les domaines soient Lipschitz. Alors pour toute donnée initiale $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$, il existe une unique solution analytique $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ à* (EM) *definie sur $[0, T)$. Soit $T = +\infty$, soit $T$ correspond au temps d'une collision entre deux solides ou entre un solide et le bord extérieur du fluide.*

# Les collisions

Les collisions sont possibles dans un fluide parfait. Considérons la situation suivante :




**Theorem (J. Houot, A.M. 2006 et A.M. 2008)**

*Supposons que les bords soient de classe $C^2$ et que*

$$\lim_{\xi_1 \to 0} \frac{|\psi(\xi_1)|}{|\xi_1|^3} = +\infty.$$

*Alors pour toute position initiale $\mathbf{q}_0 = (0, h_2, 0)$ ($h_2 > 0$) et toute vitesse initiale $\dot{\mathbf{q}}_0 = (0, -\dot{h}_2, 0)$, le solide entre en collision avec le bord en temps fini.*

Le problème de Neumann :

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ sur } \Gamma,$$

peut être reformulé sous la forme d'une équation intégrale :

- Pour tout $\mathbf{y} \in \Omega$ :

$$u(\mathbf{y}) - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}(x)\, u(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| g(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma.$$

- Pour tout $\mathbf{y} \in \Gamma$ :

$$u(\mathbf{y}) - \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}(x)\, u(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma = -\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| g(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Gamma.$$

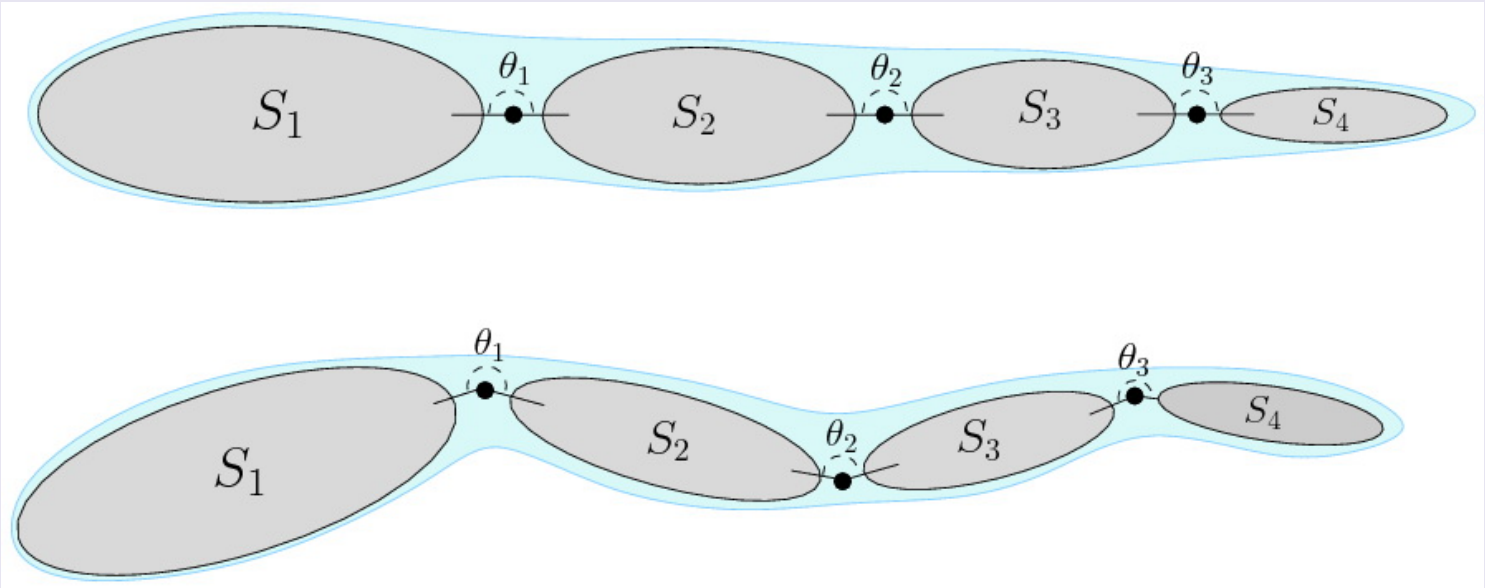
On utilise la seconde formule pour calculer les potentiels sur $\Gamma$.

Les intégrales faisant intervenir un noyau singulier sont calculées avec la méthode de Nyström : décomposition du noyau en série de Fourier et calcul de l'intégrale avec FFT.

**Avantages de la méthode**

- Les potentiels sont calculés uniquement sur les bords des solides.
- La pression dans le fluide n'est jamais calculée.
- La simulation est très rapide.

## Exemple : Une anguille

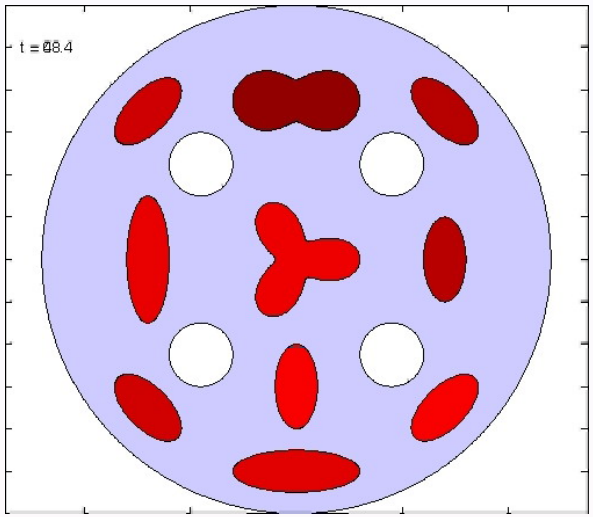


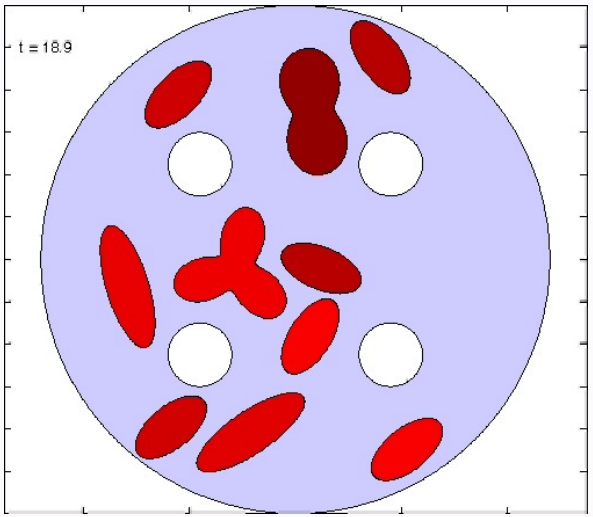

## Avantages de la mécanique Lagrangienne

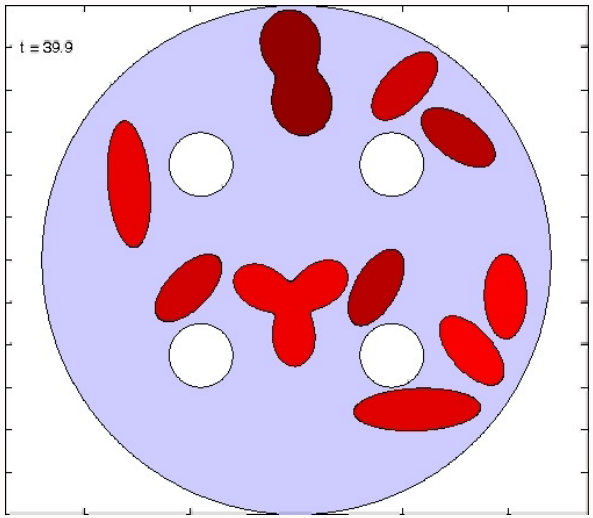
En mécanique Lagrangienne, on peut facilement spécifier certaines liaisons entre les solides (ici $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_3$).

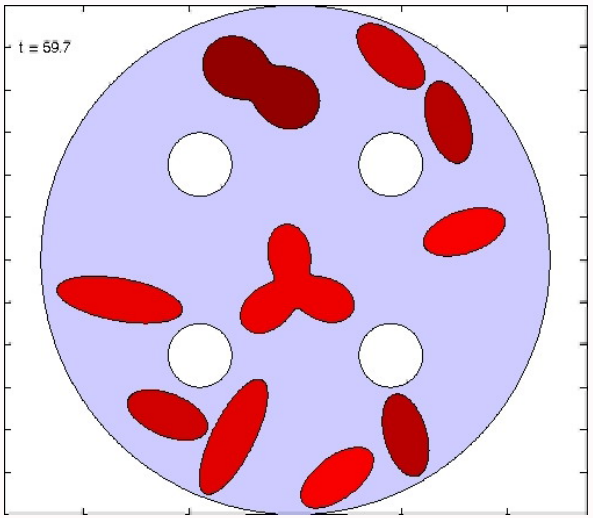
# Quelques images de simulation avec des solides

## 10 solides confinés avec collisions



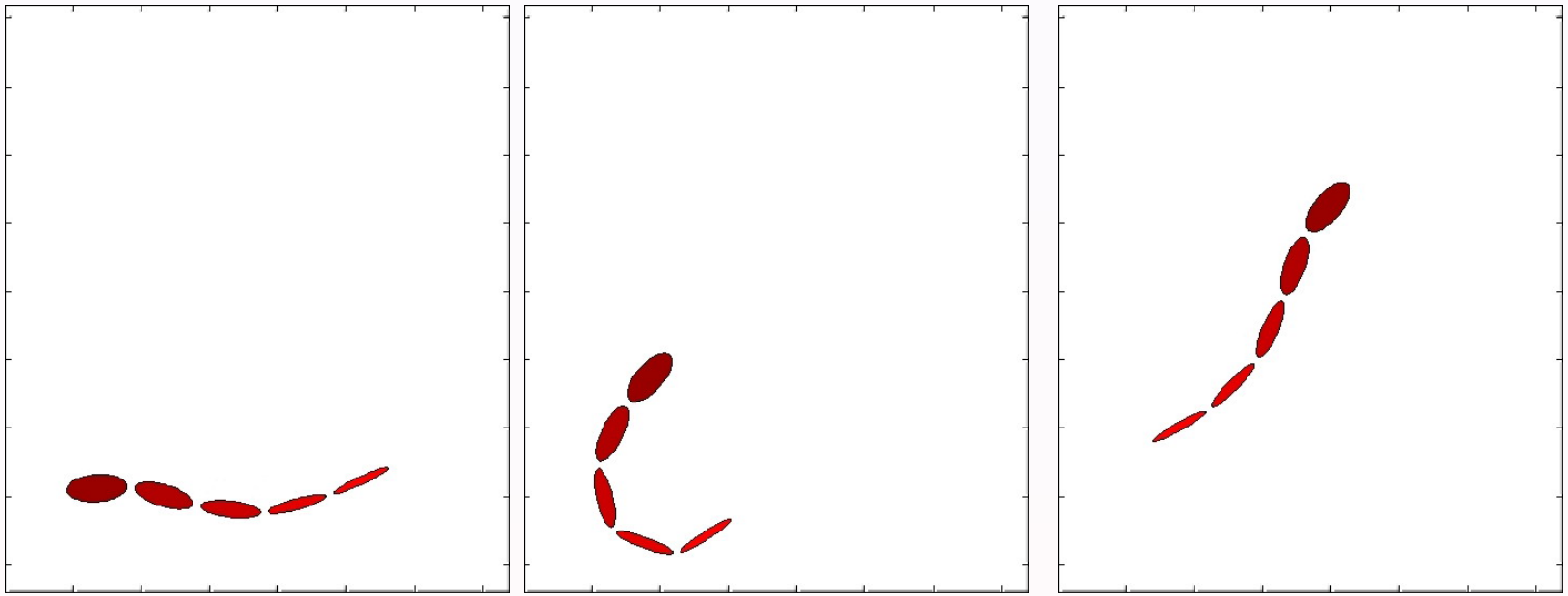



# Quelques images de simulation avec un poisson

## Poisson articulé dans un fluide parfait



# Un problème de contrôle

## Interception d'un solide par le poisson

