Approximation autosemblable du problème de Riemann. Systèmes hyperboliques non-conservatifs avec résonance

B. Boutin, F. Coquel, P.G. LeFloch

CEA Saclay
(DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR)
&
UPMC Université Paris 6
Laboratoire J.-L. Lions

39e Congrès National d'Analyse Numérique

Saint Jean de Monts
26 - 30 mai 2008

Plan

Problème du couplage

Deux demi-problèmes en $w = w(x,t) \in \mathbb{R}^N$ posés sur $\mathbb{R}_x^\pm \times \mathbb{R}_t^+$ avec conditions aux limites, non-linéairement couplés en 0 :

$$\boxed{\Gamma_-\big(w(0^-,t)\big) = \Gamma_+\big(w(0^+,t)\big)}$$

$$\partial_t w + \partial_x f_-(w) = 0 \qquad \Big| \qquad \partial_t w + \partial_x f_+(w) = 0$$

$$x = 0$$

Problème du couplage

Deux demi-problèmes en $w = w(x,t) \in \mathbb{R}^N$ posés sur $\mathbb{R}_x^{\pm} \times \mathbb{R}_t^{+}$ avec conditions aux limites, non-linéairement couplés en 0 :

$$\boxed{\Gamma_-\big(w(0^-,t)\big) = \Gamma_+\big(w(0^+,t)\big)}$$

$$\partial_t w + \partial_x f_-(w) = 0 \qquad \Big| \qquad \partial_t w + \partial_x f_+(w) = 0$$

$$x = 0$$

Le couplage est compris au sens fort tant que l'interface n'est pas caractéristique, sinon

$$w(0^-,t) \in \mathcal{O}_-(\Gamma_-^{-1} \circ \Gamma_+(w(0^+,t)))$$
$$w(0^+,t) \in \mathcal{O}_+(\Gamma_+^{-1} \circ \Gamma_-(w(0^-,t)))$$

avec les ensembles de traces admissibles

$$\mathcal{O}_-(u_R) = \big\{W_-(0^-,u,u_R), u \in \Omega\big\} \text{ pour le problème de Riemann en } f_-,$$
$$\mathcal{O}_+(u_L) = \big\{W_+(0^+,u_L,u), u \in \Omega\big\} \text{ pour le problème de Riemann en } f_+.$$

Dubois-LeFloch, 1988 ; Godlewski-Le Thanh-Raviart, 2005.

Problème du couplage

Deux demi-problèmes en $w = w(x,t) \in \mathbb{R}^N$ posés sur $\mathbb{R}_x^{\pm} \times \mathbb{R}_t^{+}$ avec conditions aux limites, non-linéairement couplés en 0 :

$$\boxed{\Gamma_-\big(w(0^-,t)\big) = \Gamma_+\big(w(0^+,t)\big)}$$

$$\partial_t w + \partial_x f_-(w) = 0 \qquad \Big| \qquad \partial_t w + \partial_x f_+(w) = 0$$

$$x = 0$$

Le couplage est compris au sens fort tant que l'interface n'est pas caractéristique, sinon

$$\begin{aligned} w(0^-,t) &\in \mathcal{O}_-(\Gamma_-^{-1} \circ \Gamma_+(w(0^+,t))) \\ w(0^+,t) &\in \mathcal{O}_+(\Gamma_+^{-1} \circ \Gamma_-(w(0^-,t))) \end{aligned}$$

avec les ensembles de traces admissibles

$$\mathcal{O}_-(u_R) = \big\{W_-(0^-,u,u_R), u \in \Omega\big\} \text{ pour le problème de Riemann en } f_-,$$

$$\mathcal{O}_+(u_L) = \big\{W_+(0^+,u_L,u), u \in \Omega\big\} \text{ pour le problème de Riemann en } f_+.$$

Dubois-LeFloch, 1988 ; Godlewski-Le Thanh-Raviart, 2005.

Motivation

Comprendre ces conditions de couplages lorsque l'interface est caractéristique.
Qu'en est-il de l'existence/unicité des solutions ?

Un système non-conservatif avec résonance

- **Changement de variable** $u = \Gamma_{\pm}(w), \ \pm x > 0$: "$u(0^-, t) = u(0^+, t)$".

Un système non-conservatif avec résonance

- **Changement de variable** $u = \Gamma_\pm(w), \ \pm x > 0$: "$u(0^-, t) = u(0^+, t)$".
- **Extension** à un problème défini sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ entier via l'**introduction d'une variable supplémentaire** $v \in [-1, 1]$ déterminant le modèle en considération.

Un système non-conservatif avec résonance

- **Changement de variable** $u = \Gamma_\pm(w)$, $\pm x > 0$: "$u(0^-, t) = u(0^+, t)$".
- **Extension** à un problème défini sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ entier via l'**introduction d'une variable supplémentaire** $v \in [-1, 1]$ déterminant le modèle en considération.

$$\begin{cases} A_0(u,v)\partial_t u + A_1(u,v)\partial_x u = 0 \\ \partial_t v = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

$$\text{avec } v(x,0) = \pm 1, \qquad \pm x > 0$$

Consistance de A_0, A_1 avec le couplage considéré :

$$\begin{aligned} &A_0(u,\pm 1) = \nabla\Gamma_\pm^{-1}(u) \\ &A_1(u,\pm 1) = \nabla f_\pm(\Gamma_\pm^{-1}(u))\nabla\Gamma_\pm^{-1}(u) \\ &A_0^{-1}A_1(u,v) \ \mathbb{R}\text{-diagonalisable} \end{aligned}$$

Un système non-conservatif avec résonance

- **Changement de variable** $u = \Gamma_\pm(w)$, $\pm x > 0$: "$u(0^-, t) = u(0^+, t)$".
- **Extension** à un problème défini sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ entier via l'**introduction d'une variable supplémentaire** $v \in [-1, 1]$ déterminant le modèle en considération.

$$\begin{array}{ll} A_0(u,v)\partial_t u + A_1(u,v)\partial_x u = 0 & \\ \partial_t v = 0 & \end{array} \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

$$\text{avec } v(x,0) = \pm 1, \qquad \pm x > 0$$

Consistance de A_0, A_1 avec le couplage considéré :

$$\begin{array}{l} A_0(u,\pm 1) = \nabla\Gamma_\pm^{-1}(u) \\ A_1(u,\pm 1) = \nabla f_\pm(\Gamma_\pm^{-1}(u))\nabla\Gamma_\pm^{-1}(u) \\ A_0^{-1}A_1(u,v)\ \mathbb{R}\text{-diagonalisable} \end{array}$$

Difficulté

Le système hyperbolique de taille N en la variable u est strictement hyperbolique (à coefficients discontinus).
Cependant, le système hyperbolique $N{+}1$ en (u, v) est seulement faiblement hyperbolique : 0 est valeur propre associée à v alors qu'une valeur propre de $A_0^{-1}A_1$ peut déjà s'annuler : résonance.

Résonance : Isaacson-Temple, 1992 ; Goatin-LeFloch, 2004

Régularisation visqueuse par Dafermos

L'Ansatz de Dafermos

Approcher l'équation hyperbolique non-linéaire d'inconnue $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

par l'approximation parabolique :

$$\partial_t u^\epsilon + A(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \epsilon t \partial_x (B(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)$$

Régularisation visqueuse par Dafermos

L'Ansatz de Dafermos

Approcher l'équation hyperbolique non-linéaire d'inconnue $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

par l'approximation parabolique :

$$\partial_t u^\epsilon + A(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \epsilon t \partial_x (B(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)$$

Justification :

$$\partial_t u^\epsilon + A(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \partial_x (B(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)$$

devient après changement de variable : $\xi = x/t,\ T = \ln t,\ u \to \tilde{u}$

$$\partial_T \tilde{u} + \big(-\xi Id + A(\tilde{u})\big)\partial_\xi \tilde{u} = e^{-T}\ \partial_\xi \big(B(\tilde{u})\partial_\xi \tilde{u}\big)$$

Régularisation visqueuse par Dafermos

L'Ansatz de Dafermos

Approcher l'équation hyperbolique non-linéaire d'inconnue $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

par l'approximation parabolique :

$$\partial_t u^\epsilon + A(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \epsilon t \partial_x(B(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)$$

Justification :

$$\partial_t u^\epsilon + A(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \partial_x(B(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon)$$

devient après changement de variable : $\xi = x/t,\ T = \ln t,\ u \to \tilde{u}$

$$\partial_T \tilde{u} + \big(- \xi Id + A(\tilde{u})\big)\partial_\xi \tilde{u} = \epsilon\ \partial_\xi \big(B(\tilde{u})\partial_\xi \tilde{u}\big)$$

Régime asymptotique en temps grand.

(C. Dafermos, 1973)

Équations étudiées

Recherche des solutions autosemblables $u = u(x/t) = u(\xi)$ du système

$$\begin{aligned} \big(-\xi A_0(u^\epsilon, v^\epsilon) + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon)\big) d_\xi u^\epsilon &= \epsilon \ d_\xi \left(B(u^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi u^\epsilon\right) \\ -\xi d_\xi v^\epsilon &= \epsilon^p \ d_{\xi\xi} v^\epsilon \end{aligned}$$

sous les hypothèses de proximité

$$\begin{aligned} & A_0(u, v) \simeq Id, \quad \text{(i.e. } \Gamma_- \simeq \Gamma_+), \\ & B(u, v) \simeq Id, \\ & A_0^{-1} A_1(u, v) \ \mathbb{R}\text{-diagonalisable.} \end{aligned}$$

avec des conditions aux limites

$$\begin{aligned} u^\epsilon(-\infty) &= u_L, & u^\epsilon(+\infty) &= u_R, \\ v^\epsilon(-\infty) &= -1, & v^\epsilon(+\infty) &= +1, \end{aligned}$$

Remarque :
Le modèle originel $f_\pm$, $\Gamma_\pm$ a été enrichit par l'introduction de A_0, A_1, B et du paramètre p (contrôle de la compétition entre les effets visqueux et les effets du couplage).

Résultats

$$\begin{aligned} \big(- \xi A_0(u^\epsilon, v^\epsilon) + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon)\big) d_\xi u^\epsilon &= \epsilon \; d_\xi \left(B(u^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi u^\epsilon\right) \\ -\xi d_\xi v^\epsilon &= \epsilon^p \; d_{\xi\xi} v^\epsilon \end{aligned}$$

"Théorème"

Pour des modèles f_-, f_+ suffisament proches,
Pour des données initiales u_L, u_R suffisament proches,

- existence de solution u^ϵ à ϵ donné
- existence d'une limite u lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$,
- w solution entropique du problème initial sur chaque demi-espace

Principe de démonstration :
Tzavaras, 1996 ; Joseph-LeFloch, 2002, 2005

- recherche de $d_\xi u^\epsilon$ comme décomposition implicite sur une base de vecteurs propres adaptée au problème
- estimation de coefficients d'interactions entre les ondes décrivant la solution, et des coefficients d'interactions avec l'onde de couplage $d_\xi v^\epsilon$ permettant

$\longrightarrow$ l'utilisation de **théorèmes de point fixe.** detail

- formulation faible et argument TVB sur u^ϵ.

Résultats

$$\begin{aligned}\big(-\xi A_0(u^\epsilon, v^\epsilon) + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon)\big) d_\xi u^\epsilon &= \epsilon\ d_\xi \left(B(u^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi u^\epsilon\right)\\ -\xi d_\xi v^\epsilon &= \epsilon^p\ d_{\xi\xi} v^\epsilon\end{aligned}$$

"Théorème"

Pour des modèles f_-, f_+ suffisament proches,
Pour des données initiales u_L, u_R suffisament proches,

- existence de solution u^ϵ à ϵ donné
- existence d'une limite u lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$,
- w solution entropique du problème initial sur chaque demi-espace

Principe de démonstration :
Tzavaras, 1996 ; Joseph-LeFloch, 2002, 2005

- recherche de $d_\xi u^\epsilon$ comme décomposition implicite sur une base de vecteurs propres adaptée au problème
- estimation de coefficients d'interactions entre les ondes décrivant la solution, et des coefficients d'interactions avec l'onde de couplage $d_\xi v^\epsilon$ permettant

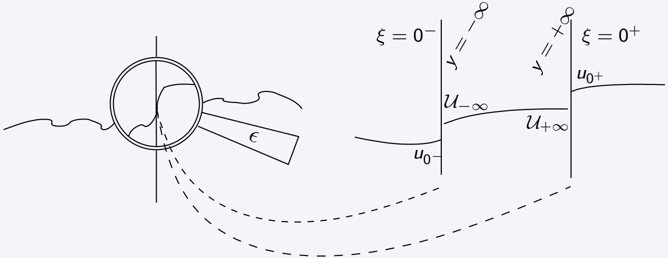
$\longrightarrow$ l'utilisation de **théorèmes de point fixe.** ▸ detail

- formulation faible et argument TVB sur u^ϵ.

Que s'est-il passé à l'interface ?

Couche limite

Méthode de blow-up :
Changement d'échelle $y = \xi/\epsilon$ destiné à garder la trace du profil à l'interface en convergence $\epsilon \to 0$.
Nouvelles variables : $\mathcal{U}^\epsilon(y) = u^\epsilon(\epsilon y)$ et $\mathcal{V}^\epsilon(y) = v^\epsilon(\epsilon y)$.



La relation de couplage est obtenue comme un lien algébrique successivement entre

- $u(0^-)$ et $\mathcal{U}(-\infty)$,
- $\mathcal{U}(-\infty)$ et $\mathcal{U}(+\infty)$,
- $\mathcal{U}(+\infty)$ et $u(0^+)$.

Couche limite dans le cas scalaire

Modèle :
$A_0(u,v) = 1$, i.e. $\Gamma_- = \Gamma_+$
$A_1(u,v) = \frac{1-v}{2} f'_-(u) + \frac{1+v}{2} f'_+(u)$,
$B = 1$,
$p = 2$.

Couche limite dans le cas scalaire

Modèle :
$A_0(u,v) = 1$, i.e. $\Gamma_- = \Gamma_+$
$A_1(u,v) = \frac{1-v}{2} f'_-(u) + \frac{1+v}{2} f'_+(u)$,
$B = 1$,
$p = 2$.

À l'interface, le couplage est obtenu asymptotiquement comme la juxtaposition de :

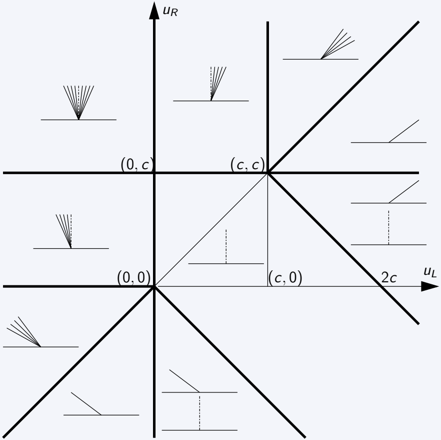
- un choc stationnaire pour le modèle gauche f_- : $f_-(\mathcal{U}_{-\infty}) = f_-(u(0^-))$,
- un profil de couche limite $\mathcal{U}$, solution de $A_1(\mathcal{U},\mathcal{V}) d_y \mathcal{U} = d_y(B(\mathcal{U},\mathcal{V}) d_y \mathcal{U})$, avec $\mathcal{V}(y) = \mathrm{erf}(y/\sqrt{2})$,
- un choc stationnaire pour le modèle droit f_+ : $f_+(u(0^+)) = f_+(\mathcal{U}_{+\infty})$,

chacun vérifiant des conditions d'entropies héritées de la viscosité positive B.

Dans la suite on condidère les flux quadratiques $f_-(u) = u^2/2$, et $f_+(u) = (u-c)^2/2$.

Exemple du cas scalaire

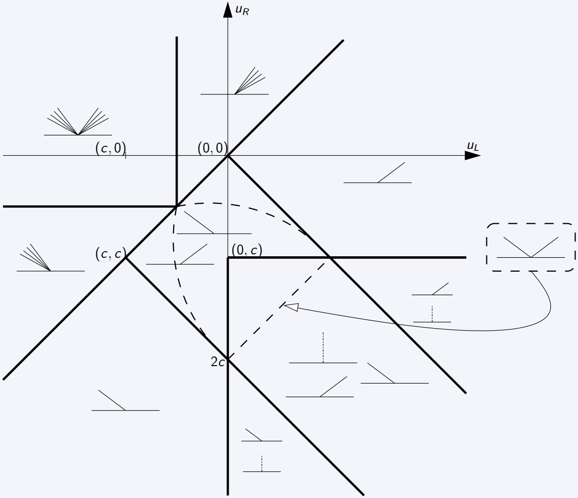
Classification des solutions possibles dans le plan des données Riemann (u_L, u_R) : lorsque $c > 0$



2 secteurs résonants sans unicité.

Exemple du cas scalaire

Classification des solutions possibles dans le plan des données Riemann (u_L, u_R) : lorsque $c < 0$



6 secteurs résonants sans unicité,
jusqu'à 4 solutions possibles.

Prospection numérique

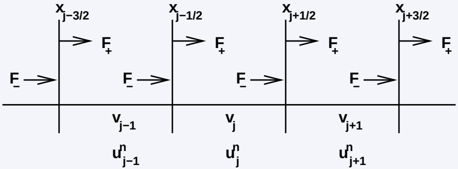
Schéma numérique inspiré du schéma à deux flux d'Engquist-Osher

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x}\left(\mathcal{F}_+(u_j^n, u_{j+1}^n; v_j) - \mathcal{F}_+(u_{j-1}^n, u_j^n; v_j)\right)$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(r,s;v) = \frac{1}{2}\left(F_v(r) + F_v(s) - \int_r^s |F_v'(t)|\, dt\right)$$

$$F_v(u) = \frac{1-v}{2} f_-(u) + \frac{1+v}{2} f_+(u)$$

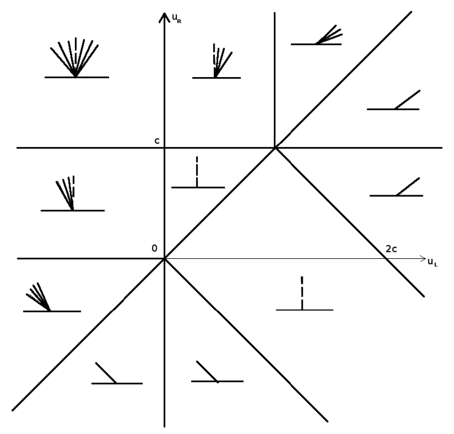
Δt^n satisfait une CFL standard.



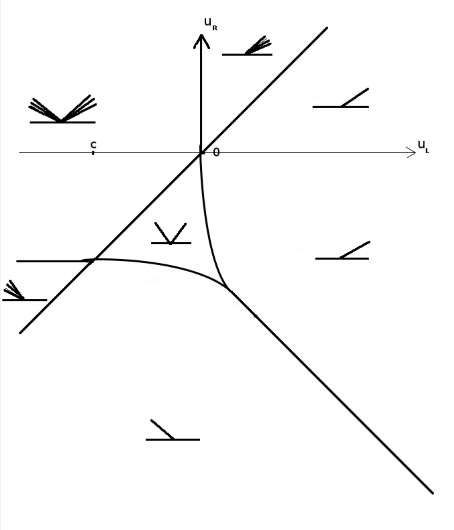
Les simulations effectuées sont de deux types :

- Interface mince : $v =$ Heavyside
- Interface épaisse : $v =$ régularisée

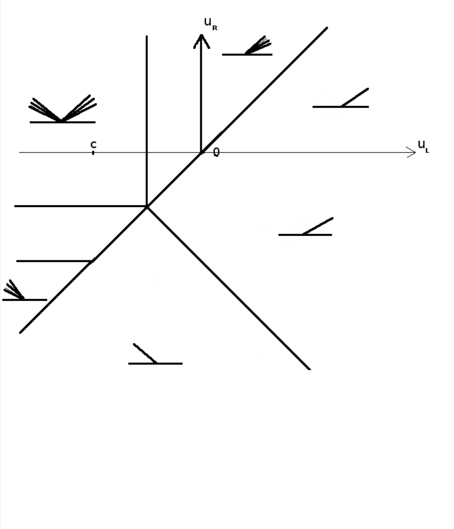
Solution numérique, $c > 0$ interface mince ou épaisse



Solution numérique, $c < 0$ interface mince



Solution numérique, $c < 0$ interface épaisse



Conclusions et perspectives

- l'existence de solutions autosemblables du système de couplage est obtenue,
- les tests numériques illustrent la possible instabilité de certaines solutions théoriquement admissibles,
- ainsi que la sensibilité du couplage à la modélisation de l'interface dans les cas résonants
- l'analyse de l'interface reste à réaliser dans le cas général,
- étude mathématique et numérique de la stabilité des solutions ainsi obtenues,

B.Boutin, F.Coquel, P.G.LeFloch, *Self-similar approximation to the Riemann problem for coupled hyperbolic systems*, en préparation.

Grandes lignes de la démonstration d'existence

$$\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u^\epsilon, v^\epsilon)\big) d_\xi u^\epsilon = \epsilon d_\xi \big(B(u^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi u^\epsilon\big)$$

Base de vecteurs propres $\widehat{r}_j(u, v, \xi)$ adaptés au problème :

$$\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u, v)\big)\, \widehat{r}_j(u, v, \xi) = \mu_j(u, v, \xi)\, B(u, v)\, \widehat{r}_j(u, v, \xi),$$
$$\widehat{l}_j(u, v, \xi)\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u, v)\big) = \mu_j(u, v, \xi)\, \widehat{l}_j(u, v, \xi) B(u, v).$$

Formule de représentation implicite :

$$d_\xi u^\epsilon = \sum_j a_j^\epsilon(\cdot)\, \widehat{r}_j(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)$$

Grandes lignes de la démonstration d'existence

$$\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u^\epsilon, v^\epsilon)\big) d_\xi u^\epsilon = \epsilon d_\xi \big(B(u^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi u^\epsilon\big)$$

Base de vecteurs propres $\widehat{r}_j(u, v, \xi)$ adaptés au problème :

$$\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u, v)\big)\, \widehat{r}_j(u, v, \xi) = \mu_j(u, v, \xi)\, B(u, v)\, \widehat{r}_j(u, v, \xi),$$
$$\widehat{l}_j(u, v, \xi)\big(-\xi\ \mathrm{Id} + A(u, v)\big) = \mu_j(u, v, \xi)\, \widehat{l}_j(u, v, \xi) B(u, v).$$

Formule de représentation implicite :

$$d_\xi u^\epsilon = \sum_j a_j^\epsilon(\cdot)\, \widehat{r}_j(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)$$

$$a_i' - \frac{\mu_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)}{\epsilon}\, a_i = L_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot) + Q_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot) + S_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot).$$

$$L_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot) := \sum_j \pi_{ij}(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)\, a_j,$$
$$Q_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot) := \sum_{j,k} \kappa_{ijk}(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)\, a_j\, a_k,$$
$$S_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot) := \sum_j \sigma_{ij}(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)\, a_j\, \psi, \ \text{avec } \psi = d_\xi v^\epsilon.$$

Structure générale

On construit a_i^ϵ comme essentiellement solution de la partie principale (découplée) de l'équation précédente :

$$y' - \frac{\mu_i(u^\epsilon, v^\epsilon, \cdot)}{\epsilon} y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{solution } \varphi_i^\star \text{ t.q. } \|\varphi_i^\star\|_1 = 1.$$

à $\tau \in \mathbb{R}^N$ donné suffisamment petit, recherche d'une correction θ t.q. $(a_i^\epsilon)_{1\leq i\leq N}$:

$$a_i^\epsilon = \tau_i \varphi_i^\star + \theta_i, \text{ avec } \|\theta\| \leq |\tau|^2 + \nu|\tau|.$$

soit solution du système précédent.

Pour cela, on obtient $(\theta_i)_{1\leq i\leq N}$ comme point fixe d'une application $T : \theta \mapsto T_k(\theta)$ définie par

$$\begin{aligned} T_k(\theta)(\xi) = & \varphi_k^\star(\xi) \int_{c_k}^{\xi} \frac{1}{\varphi_k^\star(x)} \sum_i \pi_{ik}(x)\big(\tau_i\varphi_i^\star(x) + \theta_i(x)\big)\, dx \\ & + \varphi_k^\star(\xi) \int_{c_k}^{\xi} \frac{1}{\varphi_k^\star(x)} \sum_{ij} \kappa_{ijk}(x)\big(\tau_i\varphi_i^\star(x) + \theta_i(x)\big)\big(\tau_j\varphi_j^\star(x) + \theta_j(x)\big)\, dx \\ & + \varphi_k^\star(\xi) \int_{c_k}^{\xi} \frac{1}{\varphi_k^\star(x)} \sum_i \sigma_{ik}(x)\big(\tau_i\varphi_i^\star(x) + \theta_i(x)\big)\psi(x)\, dx \end{aligned}$$

Travaux antérieurs (Tzavaras, 1996 ; Joseph-LeFloch, 2002, 2005)

L'hypothèse de stricte hyperbolicité équivaut ici à ce que les supports des $\varphi_i^\star$ soient "bien séparés". Il en découle :

Coefficients binaires : influence de l'onde j sur l'onde i

$$J_{j\to i}(\xi) := \varphi_i^\star(\xi) \int_{c_i}^{\xi} \frac{\varphi_j^\star}{\varphi_i^\star}\, dx$$

$$\left|J_{j\to i}(\xi)\right| \leq \begin{cases} O(\epsilon)\,(\varphi_i^\star(\xi) + \varphi_j^\star(\xi)), & i \neq j, \\ 2L\,\varphi_i^\star(\xi), & i = j. \end{cases}$$

Coefficients ternaires : influence de l'interaction $j+k$ sur l'onde i

$$F_{jk\to i}(\xi) := \varphi_i^\star(\xi) \int_{c_i}^{\xi} \frac{\varphi_j^\star\,\varphi_k^\star}{\varphi_i^\star}\, dx$$

$$\left|F_{jk\to i}(\xi)\right| \leq C\left(\varphi_i^\star(\xi) + \varphi_j^\star(\xi) + \varphi_k^\star(\xi)\right).$$

Le deuxième résultat étant obtenu comme conséquence du premier, via l'inégalité $2|ab| \leq (a^2 + b^2)$ et une estimation L^∞.

Nouveauté

Onde de couplage $\psi = d_\xi v^\epsilon$

$$J^{\psi}_{i\to j}(\xi) := \varphi^\star_j(\xi) \int_{c_j}^{\xi} \psi(x) \frac{\varphi^\star_i(x)}{\varphi^\star_j(x)}\, dx.$$

On ne voit pas ce coefficient comme une mesure de l'influence des ondes $\varphi^\star_i$ et ψ sur l'onde $\varphi^\star_j$ mais plutôt comme une mesure de l'influence de l'onde i sur l'onde j au travers du couplage décrit par l'onde ψ.

Difficulté : le support de l'onde ψ et de l'onde résonante $\varphi^\star_m$ contiennent tous deux 0 et ne sont pas séparés. Cependant on obtient :

Coefficient d'interaction binaire résonante

Soit $\psi \in L^1$ et $i \neq j$, alors

$$\left| J^{\psi}_{i\to j}(\xi) \right| \leq O(1)\, \|\psi\|_1 \left(\varphi^\star_i(\xi) + \varphi^\star_j(\xi) \right), \qquad \epsilon > 0.$$

Tout cela permet de conclure au résultat d'existence de u^ϵ et de sa limite. retour