

# Domaines nodaux et partitions spectrales minimales

Virginie BONNAILLIE-NOËL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne

Bernard HELFFER, Université Paris Sud

Grégory VIAL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne

**Mots-clés** : domaine nodal, 3-partition, modes propres du Laplacien.

On considère un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , régulier et connexe. On souhaite comprendre le lien entre certaines  $k$ -partitions de  $\Omega$  et les ensembles nodaux des vecteurs propres du Laplacien sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet. On note  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des  $k$ -partitions  $\mathcal{D} = (D_i)_{i=1}^k$  de  $\Omega$  telles que

$$\text{Int}(\overline{\cup_i D_i}) \setminus \partial\Omega = \Omega.$$

On définit alors

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf\{\max\{\lambda_1(D_i), i = 1, \dots, k\}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}_k\},$$

où  $\lambda_j(D)$  désigne la  $j^{\text{e}}$  plus petite valeur propre de la réalisation de Dirichlet du Laplacien sur  $D$ . Une partition qui réalise le minimum est appelée  $k$ -partition minimale. Il est facile de montrer que

$$\mathfrak{L}_2(\Omega) = \lambda_2(\Omega).$$

Dans ce cas, les ensembles nodaux du 2<sup>e</sup> vecteur propre fournissent une 2-partition minimale. Dès que  $k \geq 3$ , les choses ne sont plus aussi simples. Si on note  $L_k(\Omega)$  la plus petite valeur propre telle qu'il existe une fonction propre associée qui possède  $k$  ensembles nodaux, alors on peut montrer que

$$\lambda_k(\Omega) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega) \leq L_k(\Omega).$$

Il n'est pas difficile de voir que pour le carré et le disque, on a égalité dans la relation précédente pour  $k = 1, 2, 4$  et inégalité stricte lorsque  $k = 3$ . En se restreignant aux configurations symétriques, nous utilisons la méthode des éléments finis pour construire des candidats aux 3-partitions minimales du disque et du carré.

Nous rappellerons quelques résultats de [3] sur les partitions minimales et proposerons des simulations numériques (voir [1, 2]) pour conforter certaines conjectures.

## Références

- [1] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER AND G. VIAL, *Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions*, Prépublication IRMAR, 07-35, 2007.
- [2] V. BONNAILLIE-NOËL AND G. VIAL, *Computations for nodal domains and spectral minimal partitions*, <http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/simulations/MinimalPartitions>, 2008.
- [3] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF AND S. TERRACINI, *Nodal domains and spectral minimal partitions*, A paraître aux Annales de l'IHP, 2008.

Virginie BONNAILLIE-NOËL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne, UEB, av Robert Schuman, 35170 Bruz  
Virginie.Bonnaillie@bretagne.ens-cachan.fr  
Bernard HELFFER, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris Sud, 91405 Orsay cedex  
Bernard.Helffer@math.u-psud.fr  
Grégory VIAL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne, UEB, av Robert Schuman, 35170 Bruz  
Grégory.Vial@bretagne.ens-cachan.fr