

Domaines nodaux et partitions spectrales minimales

Virginie BONNAILLIE-NOËL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne

Bernard HELFFER, Université Paris Sud

Grégory VIAL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne

Mots-clés : domaine nodal, 3-partition, modes propres du Laplacien.

On considère un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 , régulier et connexe. On souhaite comprendre le lien entre certaines k -partitions de Ω et les ensembles nodaux des vecteurs propres du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet. On note \mathcal{D}_k l'ensemble des k -partitions $\mathcal{D} = (D_i)_{i=1}^k$ de Ω telles que

$$\text{Int}(\overline{\cup_i D_i}) \setminus \partial\Omega = \Omega.$$

On définit alors

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf\{\max\{\lambda_1(D_i), i = 1, \dots, k\}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}_k\},$$

où $\lambda_j(D)$ désigne la j^{e} plus petite valeur propre de la réalisation de Dirichlet du Laplacien sur D . Une partition qui réalise le minimum est appelée k -partition minimale. Il est facile de montrer que

$$\mathfrak{L}_2(\Omega) = \lambda_2(\Omega).$$

Dans ce cas, les ensembles nodaux du 2^e vecteur propre fournissent une 2-partition minimale. Dès que $k \geq 3$, les choses ne sont plus aussi simples. Si on note $L_k(\Omega)$ la plus petite valeur propre telle qu'il existe une fonction propre associée qui possède k ensembles nodaux, alors on peut montrer que

$$\lambda_k(\Omega) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega) \leq L_k(\Omega).$$

Il n'est pas difficile de voir que pour le carré et le disque, on a égalité dans la relation précédente pour $k = 1, 2, 4$ et inégalité stricte lorsque $k = 3$. En se restreignant aux configurations symétriques, nous utilisons la méthode des éléments finis pour construire des candidats aux 3-partitions minimales du disque et du carré.

Nous rappellerons quelques résultats de [3] sur les partitions minimales et proposerons des simulations numériques (voir [1, 2]) pour conforter certaines conjectures.

Références

- [1] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER AND G. VIAL, *Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions*, Prépublication IRMAR, 07-35, 2007.
- [2] V. BONNAILLIE-NOËL AND G. VIAL, *Computations for nodal domains and spectral minimal partitions*, <http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/simulations/MinimalPartitions>, 2008.
- [3] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF AND S. TERRACINI, *Nodal domains and spectral minimal partitions*, A paraître aux Annales de l'IHP, 2008.

Virginie BONNAILLIE-NOËL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne, UEB, av Robert Schuman, 35170 Bruz
Virginie.Bonnaillie@bretagne.ens-cachan.fr

Bernard HELFFER, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris Sud, 91405 Orsay cedex
Bernard.Helffer@math.u-psud.fr

Grégory VIAL, IRMAR, ENS Cachan Bretagne, UEB, av Robert Schuman, 35170 Bruz
Grégory.Vial@bretagne.ens-cachan.fr