

# Résolution numérique d'un modèle de Cahn-Hilliard triphasique.

**Sebastian MINJEAUD**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

**Franck Boyer**, Université Paul Cézanne (Aix-Marseille III)

**Céline Lapuerta**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

**Bruno Piar**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

L'objectif de la communication est de décrire certains aspects numériques liés à la simulation d'écoulements incompressibles à trois phases non miscibles, à l'aide de modèles à interfaces diffuses - les interfaces sont représentées par des zones d'épaisseur faible mais non nulle - de type Cahn-Hilliard [1]. La résolution numérique du système d'équations (obtenu par minimisation d'une énergie libre à potentiel non convexe) est effectuée en deux étapes, semi-discrétisation en temps puis discrétisation en espace.

Le choix de la discrétisation en temps doit conduire à une estimation d'énergie gage d'existence des solutions discrètes et de leur convergence vers la solution faible du problème. Du fait de la non convexité du potentiel, le schéma d'euler implicite ne vérifie la décroissance de l'énergie discrète que pour de petits pas de temps. Ceci suggère d'explicitier la partie non-convexe du potentiel. L'estimation d'énergie est alors valable pour tout pas de temps mais une forte erreur de troncature est introduite (raideur des inconnues à travers l'interface). Nous proposons une discrétisation semi-implicite du potentiel qui permet de garantir l'estimation d'énergie pour tout pas de temps et de limiter l'erreur de troncature. De plus, cette discrétisation est consistante avec les modèles diphasiques. En effet, lorsque l'une des trois phases n'est pas présente, cette discrétisation dégèrène en un schéma d'ordre deux pour les équations de Cahn-Hilliard diphasique.

La discrétisation en espace est effectuée par approximation variationnelle de Galerkin-éléments finis. La présence d'échelles très différentes dans le système (les épaisseurs d'interfaces étant très petites devant les tailles caractéristiques du domaine) suggère la mise en place d'une méthode de raffinement local. Notre choix de la méthode de raffinement CHARMS [2] permet de prendre en compte implicitement les non conformités des maillages générés pour produire, *in fine*, des espaces d'approximation éléments finis conformes. Le principe est de raffiner en premier lieu les fonctions de base plutôt que le maillage. Le raffinement d'une fonction de base est rendu possible par l'existence conceptuelle d'une suite emboîtée de grilles uniformément raffinées desquelles sont déduites des relations "parents-enfants" reliant les fonctions de bases de deux niveaux successifs de raffinement. Raffiner ou déraffiner des fonctions de base signifie alors remplacer les parents (resp. les enfants) par leurs enfants (resp. leurs parents).

Enfin, nous montrons comment l'on peut exploiter cette méthode pour construire des préconditionneurs multigrilles. A partir d'un espace d'approximation éléments finis composite (contenant plusieurs niveaux de raffinement), il est en effet possible par "coarsening" de reconstruire une suite d'espaces emboîtés auxiliaires permettant ainsi d'entrer dans le cadre abstrait multigrille développé dans [3] ; les opérateurs de transfert entre les grilles étant déduits des relations parents-enfants de la méthode CHARMS.

## Références

- [1] F. BOYER, C. LAPUERTA, *Study of a three component Cahn-Hilliard flow model*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 653-687, 2006.
- [2] E. GRINSPUN, P. KRYSL, P. SCHRÖDER, *Natural hierarchical refinement for finite element methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1109-1124, 2003.
- [3] JAMES H. BRAMBLE, JOSEPH E. PASCIAK, JINCHAO XU, *Parallel Multilevel Preconditioners*, Mathematics of computation, Vol. 55 No.191, 1990.

**Sebastian MINJEAUD**, DPAM/SEMIC/LIMSI BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance  
sebastian.minjeaud@irsn.fr

**Franck Boyer**, Université Paul Cézanne, 13397 Marseille Cedex 20  
fboyer@latp.univ-mrs.fr

**Céline Lapuerta**, IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance  
celine.lapuerta@irsn.fr

**Bruno Piar**, IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI BP3-13115 Saint-Paul-Lez-Durance  
bruno.piar@irsn.fr