

Éléments finis d'ordre élevé pour les équations de Vlasov-Maxwell

Marc DURUFLÉ, INRIA Rocquencourt

Mots-clés : Éléments finis - Vlasov-Maxwell - Méthodes PIC - Galerkin discontinu

On considère une méthode de type PIC (Particle-In-Cell). Les équations résolues s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}(x, t) - \operatorname{curl} H(x, t) &= -J(x, t) \\ \mu \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + \operatorname{curl} E(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial x_k}{\partial t}(t) &= v_k(t) \\ \frac{\partial p_k}{\partial t}(t) &= \frac{q_k}{m_k}(E_k(t) + \mu v_k(t) \times H_k(t))\end{aligned}$$

où E et H sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique. (x_k, p_k) est un ensemble de macro-particules relativistes définies par leur charge q_k , leur masse m_k , leur position x_k et leur moment p_k (le moment est la vitesse multipliée par le facteur relativiste). Le courant J est fourni par la relation

$$J(x, t) = \sum_k \omega_k q_k v_k(t) S_k(x)$$

où S_k est une fonction de distribution de chaque macro-particule et ω_k le poids. Nous choisissons une distribution proposée dans l'article de Hesthaven [1].

La résolution des équations de Maxwell est réalisée à l'aide d'une méthode d'éléments finis d'arête ou avec une méthode de Galerkin discontinue, comme détaillé dans l'article [2]. Le couplage avec les équations des particules, fait alors intervenir un opérateur C_h , qui s'écrit :

$$(C_h)_{j,k} = q_k \omega_k \sum_e \int_{K_e} S_k(x) v_k \cdot \varphi_j$$

où K_e est un élément du maillage et φ_j une fonction de base utilisée dans la discrétisation du champ électrique. Pour l'évaluation des valeurs $E_k(t)$ et $H_k(t)$, on choisit de considérer l'opérateur transposé C_h^* . Ce choix se traduit en prenant pour les valeurs E_k et H_k des intégrales moyennes au lieu d'une simple interpolation au point $x_k(t)$. Ce choix judicieux nous permet d'assurer la conservation d'une énergie après discrétisation spatiale. Néanmoins une comparaison de divers schémas en temps nous a conduit à privilégier un schéma de type saute-mouton, qui est complètement explicite, mais en contrepartie ce schéma temporel n'assure plus la conservation d'une énergie.

Le calcul de C_h est réalisée de manière performante, avec deux techniques essentielles. La première technique est l'utilisation d'une quadrature approchée dont l'ordre dépend de la fonction de distribution des particules. Plus la macro-particule est grande, plus on pourra prendre une formule de quadrature peu précise. La seconde technique est l'utilisation d'une grille de localisation qui nous permet de localiser de manière rapide toutes les particules au sein du maillage. Des test numériques 2-D et 3-D valident la méthode et la comparent avec un code PIC de différences finies.

Références

- [1] G. B. JACOBS AND J. S. HESTHAVEN, *High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell method on unstructured grids*, J. Comput. Physics, vol 214, pp 96-121 (2006)
- [2] G. COHEN AND M. DURUFLÉ, *Non Spurious Spectral-Like Element Methods for Maxwell's Equations*, J. of Comput. Mathematics, vol 25, pp 282-304 (2007)

Marc DURUFLÉ, INRIA Rocquencourt
Projet POEMS, Domaine de Voluceau
78153 Le Chesnay
marc.durufle@inria.fr