

Equation intégrale adaptée aux conditions aux limites impédantes en électromagnétisme

Jennifer BOURGUIGNON, ONERA / Université Paris-Sud XI

François ALOUGES, Université Paris-Sud XI

David LEVADOUX, ONERA

Mots-clés : équations intégrales, préconditionnement, conditions impédantes, électromagnétisme

Les équations intégrales couramment utilisées en électromagnétisme résolvent les problèmes de diffraction d'ondes par un obstacle parfaitement conducteur, c'est-à-dire avec des conditions aux limites de Dirichlet ($\mathbf{E}_{\text{tan}}$ imposé) sur la frontière de l'objet diffractant. Cependant il peut être intéressant de mettre en œuvre une équation intégrale avec des conditions impédantes, aussi appelées conditions de Fourier-Robin ($\mathbf{E}_{\text{tan}} + \frac{1}{ik}\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}$ imposé) : en effet, nombre de cas d'applications traitent d'objets possédant des couches de diélectriques sur une partie de leur frontière ; les conditions impédantes interviennent également lors du découpage d'un problème, car elles permettent d'assurer la continuité sur les interfaces fictives des solutions obtenues dans chaque sous-domaine.

La plupart des problèmes aux limites de diffraction d'onde s'écrivent comme suit :

$$\text{Trouver } w \in W, \text{ tel que } Bw = u_0, \quad (1)$$

où $u_0 \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ est une distribution sur la frontière Γ d'un ensemble compact D , B est un opérateur trace sur Γ , et W est un espace d'ondes admissibles définies sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. De plus, tout champ w de W peut être paramétré à l'aide d'un potentiel $\mathcal{C}$: $w = \mathcal{C}(\gamma_0 w, \gamma_1 w)$, où $(\gamma_0 w, \gamma_1 w)$ sont les données de Cauchy de w .

Puisque le problème (1) est bien posé, il existe un opérateur A défini par $A : Bw \mapsto (\gamma_0 w, \gamma_1 w)$, d'où

$$BCA = \text{Id}. \quad (2)$$

Soit $\tilde{A}$ un opérateur ayant vocation à approcher A , alors l'équation intégrale posée sous la forme suivante

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{D}'(\Gamma), \text{ tel que } BC\tilde{A}u = u_0 \quad (3)$$

produira après discrétisation un système linéaire bien conditionné, d'après (2).

Dans le cas des équations de Maxwell, le potentiel $\mathcal{C}$ est donné par la formule de Stratton-Chu : $\mathcal{C}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}\mathbf{v} - \mathcal{K}\mathbf{u}$, où, si l'on désigne par $\mathcal{G}_k$ l'opérateur de convolution avec la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz associé au nombre d'onde k , les potentiels $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ s'expriment en fonction de $\mathcal{G}_k$ par les formules : $\mathcal{L}\mathbf{u} = \frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \mathcal{G}_k\mathbf{u}$, $\mathcal{K}\mathbf{u} = \nabla \times \mathcal{G}_k\mathbf{u}$. Soit $\mathbf{n}$ la normale extérieure au domaine D . Les données de Cauchy sont données par $(\gamma_0, \gamma_1) = (\mathbf{n} \times, \frac{1}{ik}\mathbf{n} \times \nabla \times)$ i.e. $w = \mathbf{E} = \mathcal{C}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \mathbf{H})$.

Pour les problèmes impédants, l'opérateur trace B est donné par :

$$B\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{tan}} + \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (4)$$

L'opérateur A correspondant à cet opérateur trace B est alors complètement déterminé. Nous proposerons des approximations $\tilde{A}$ de A et choisirons celles qui conduisent à des équations intégrales bien conditionnées. Nous envisageons d'implémenter numériquement cette équation, au sein du code Elsem3d développé par l'ONERA.

Références

- [1] F. ALOUGES, S. BOREL, AND D. P. LEVADOUX., *A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering*, J. Comp. Appl. Math, 2006, accepted.
- [2] D. P. LEVADOUX, *Stable integral equations for the iterative solution of electromagnetic scattering problems*, C. R. Physique, 7(5):518–532, 2006.