Un nouveau schéma hybride pour les lois de conservation hyperboliques

Pascal JAISSON, INRIA Saclay-Ile-de-France

Florian DeVuyst, ECP

Mots-clés : schéma numérique, loi de conservation hyperbolique

Nous nous intéressons aux systèmes de lois de conservation

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0,\, x \in I,\, t \geq 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \end{aligned}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ces systèmes interviennent dans de nombreux domaines : dynamique des gaz, trafic routier... De tels systèmes peuvent faire apparaître des discontinuités (chocs, discontinuités de contact) en temps fini. La difficulté est de trouver un schéma numérique qui permet d'obtenir la solution physique avec une bonne précision, en évitant les oscillations parasites (qui apparaissent par exemple avec le schéma de Lax-Wendroff). Nous proposons ainsi un schéma conservatif d'ordre 2 en temps et espace dans les domaines où la solution est régulière et possédant la stabilité L^∞ et la propriété TVD. Ce schéma dépend d'un paramètre θ ajustable dans chaque cellule d'espace et à chaque pas de temps :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\phi(u_j^n, u_{j+1}^n, \frac{\Delta t}{\Delta x}, \theta_{j+\frac{1}{2}}^n) - \phi(u_{j-1}^n, u_j^n, \frac{\Delta t}{\Delta x}, \theta_{j-\frac{1}{2}}^n)),$$

où ϕ est une fonction lipschitzienne. Ce paramètre permet d'avoir le flux de Lax-Wendroff dans les zones régulières (ordre 2) et celui de Lax-Friedrichs ou Lax-Friedrichs modifié (stabilité) dans les domaines où la solution est irrégulière. Nous verrons que ce schéma est très facile à programmer et permet d'obtenir des résultats précis, notamment lors de la capture des chocs. De plus, nous pouvons étendre ce schéma au cas multidimensionnel. Soulignons le fait que notre schéma permet d'obtenir la solution entropique en éliminant les chocs d'entropie.

Dans cette communication, nous donnerons la formule explicite du flux numérique, nous montrerons comment ajuster le paramètre à l'aide du critère d'Harten [1] et en nous inspirant du travail de Sweby sur les limiteurs de flux [2] pour obtenir les propriétés que nous avons énoncées et nous terminerons par des tests numériques validant notre schéma.

Références

[1] Harten, *High resolution scheme for hyperbolic conservation laws*, JCP, 49, 357-393, 1983.

[2] Sweby, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. 21,5, 995-1011, 1984.

Pascal JAISSON, Equipe COMMANDS, INRIA Saclay-Ile-de-France, CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
pascal.jaisson@inria.fr
Florian DeVuyst, Ecole Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry Cedex, France
florian.de-vuyst@ecp.fr