Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points

Alexandra CLAISSE, Université Pierre et Marie Curie

Pascal FREY, Université PIerre et Marie Curie, Universidad de Chile

On s'intéresse au problème de la construction d'une courbe régulière Γ passant au mieux par un nuage de points $V \subset \mathbb{R}^2$ donné, c'est-à-dire telle que:

$$\forall\, x \in \Gamma\,,\ \ d(x,V) \leq \varepsilon\,, \quad \text{où} \quad d(x,V) = \min_{\bar{x} \in V} \|x - \bar{x}\|\,,$$

pour ε, petit fixé. Plus précisément, on ne s'attache pas à obtenir une paramétrisation de celle-ci, mais on souhaite la définir comme l'ensemble d'isovaleur $u(x) = 0$ d'une fonction implicite u. Pour cela, on formule ce problème à l'aide de la méthode des lignes de niveau, initialement conçue pour propager des interfaces avec une vitesse dépendant de la courbure locale de ces variétés, [3]. En s'inspirant de divers travaux [3, 4], on va postuler que la courbe Γ cherchée, passant au mieux par les points de V, est le résultat de l'advection d'une courbe régulière $\Gamma(t)$ au cours du temps. En outre, nous pouvons montrer que la solution de cette équation d'advection est aussi celle d'un problème de minimisation dont l'équation d'Euler-Lagrange associée correspond à la courbe minimale Γ cherchée. Notons que cette approche se distingue à la fois des méthodes analogues basées sur la résolution d'une EDP issue d'une fonctionnelle d'énergie [4] et de celles basées sur la construction d'une triangulation de Delaunay. En effet, la formulation que nous proposons est composée d'un terme de régularisation (dépendant de la courbure et jouant le rôle de tension surperficielle) et d'un terme d'attraction (impliquant $d(x, V)$). D'un autre côté, les approches géométriques fournissent une interpolation affine par morceaux de Γ à partir d'une triangulation (de Delaunay) dont les points de V sont des sommets, et non une courbe régulière.
Dans notre approche, on commence par construire une triangulation T_h d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, englobant les points de V, qui servira à calculer une solution approchée u_h, en chaque sommet. Pour améliorer la précision de l'approximation numérique à convergence, il est souhaitable d'augmenter la densité de sommets au voisinage du nuage de points. Pour obtenir cette anisotropie locale, on génère un maillage non structuré simplicial quasi uniforme dans une métrique riemannienne [2]. Celle-ci est définie à partir de la courbure moyenne locale de l'isovaleur 0 d'une fonction de ligne de niveau, ici $d(x, V)$.
On cherche ici une solution de viscosité qui coïncide avec la courbe régulière minimale Γ passant au mieux par tous les points de V. Comme la régularité de cette solution est liée à la courbure $\kappa(u(t, x))$ en chaque point x de $\Gamma(t)$ (propriété géométrique), on propose donc de résoudre l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - d(x)\,\kappa(u(t,x)) = \alpha\, d(x) \tag{1}$$

où $d(x)$ est la distance $d(x, V)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante. Le terme de second ordre $d(x)\kappa(u(t, x))$ agit comme un terme de régularisation, et est combiné ici à un terme d'attraction $\alpha d(x)$. On constate que lorsque $d(x)$ tend vers 0, on obtient un minimum qui correspond à la courbe minimale cherchée passant par les points de V.
Ceci est un travail en cours de publication, [1].

Références

[1] A. Claisse, P. Frey, *Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points*, C.R. Acad. Sci. Paris, (2008)

[2] V. Ducrot, P. Frey, *Contrôle de l'approximaion géométrique d'une interface par une métrique anisotrope*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 345, Série I (2007), 537-542.

[3] S. Osher, J.A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comp. Phys., **79** (1988), 12-49.

[4] H.K. Zhao, S. Osher, B. Merriman and M. Kang,*Implicit and nonparametric shape reconstrution from unorganized data using a variational level set method*, Comput. Vision and Image Understanding, **80** (2000), 295-314.

Alexandra CLAISSE, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris
claisse@ann.jussieu.fr