Calcul de la sensibilité d'ordre deux d'une observation aérodynamique vis-à-vis d'un paramètre de forme

Ludovic MARTIN, Dassault Aviation - Institut de Mathématiques de Toulouse

Gilbert ROGÉ, Dassault Aviation

L'objectif général est de dériver une observation aérodynamique j (comme la traînée) par rapport à un paramètre x. Pour cela, on reprend la méthodologie de Giles [1], en l'étendant au cas où le contrôle x est un paramètre de définition de la forme (CAO) de l'avion. La difficulté majeure vient du fait que cette fonction j dépend de l'état w, solution des équations d'Euler (ou de Navier-Stokes). Comme le paramètre de dérivation influence l'état, créant ainsi une dépendance implicite de j vis-à-vis de x, on a recours à la formulation adjointe.

Pour la dérivée première, on arrive à l'expression (1) bien connue, où apparait l'adjoint Euler ψ. Elle utilise le fait que, le résidu Euler E étant nul, sa dérivée première par rapport à x l'est également.

$$\frac{dj}{dx} = \frac{\partial j}{\partial x} - \psi^T \frac{\partial E}{\partial x} \tag{1}$$

Le calcul de $\frac{d^2 j}{dx^2}$ par Giles fait appel à la nullité de la dérivée seconde de E vis-à-vis de x. On aboutit alors à une expression analogue entre les dérivées première et seconde de j par rapport à x (3), l'opérateur K_x^2 (2) remplaçant $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$K_a^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}(\frac{\partial w}{\partial a}; \frac{\partial w}{\partial a}) + 2\frac{\partial^2 y}{\partial w \partial a}\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \tag{2}$$

$$\frac{d^2 j}{dx^2} = K_x^2 j - \psi^T K_x^2 E \tag{3}$$

Une variation d'un paramètre de définition de la forme induit une modification du maillage surfacique (et a fortiori volumique). Ceci engendre une variation de l'état Euler w contrôlant j. Pour réaliser la déformation de maillage volumique, on résout, en plus du système Euler, un problème d'élasticité (opérateur L). La technique de Giles, étendue à ce problème à deux équations d'état, utilise la nullité des dérivées première et seconde de E mais aussi de L par rapport à x. On note d (resp. D) les variations des coordonnées du maillage surfacique (resp. volumique). La dérivée première de l'observation devient:

$$\frac{dj}{dx} = -\phi^T \frac{\partial L}{\partial d}\frac{dd}{dx} \tag{4}$$

où ϕ est l'adjoint lié à la déformation volumique. La dérivée seconde (6) s'écrit comme la somme de trois termes: le terme de dépendance explicite, celui de dépendance implicite via l'état Euler et enfin le terme de dépendance implicite via la déformation de maillage volumique. L'opérateur $F_{a,b}^2$ (5), analogue à K_a^2, apparait.

$$F_{a,b}^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial a^2}(\frac{\partial a}{\partial b}; \frac{\partial a}{\partial b}) + 2(\frac{\partial a}{\partial b})^T \frac{\partial^2 y}{\partial a \partial D}\frac{\partial D}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial D^2}(\frac{\partial D}{\partial b}; \frac{\partial D}{\partial b}) \tag{5}$$

$$\frac{d^2 j}{dx^2} = F_{w,x}^2 j - \psi^T . F_{w,x}^2 E - \phi^T (F_{d,x}^2 L + \frac{\partial L}{\partial d}\frac{d^2 d}{dx^2}) \tag{6}$$

En plus des dérivées premières et des adjoints ψ et ϕ, il suffit donc de calculer les dérivées secondes de E, j et L intervenant dans l'opérateur $F_{a,b}^2$ et de récupérer du modeleur la sensibilité seconde du déplacement surfacique (terme $\frac{d^2 d}{dx^2}$). Cette formulation ne nécessitant que la résolution des systèmes linéaires directs et adjoints, le temps de calcul reste raisonnable. De plus, la place mémoire reste linéaire en le nombre de sommets du maillage volumique, ce qui est crucial pour de futures applications industrielles.

Références

[1] Devendra P. GHATE et Michael B. GILES, *Efficient Hessian Calculation using Automatic Differentiation*, 25th AIAA Applied Aerodynamic Difference, 2007.

Ludovic MARTIN, 78, Quai Marcel Dassault 92552 Saint-Cloud - IMT, Université Paul Sabatier de Toulouse, 118 route de Narbonne 31062 TOULOUSE cedex 9
ludo.martin@gmail.com