

Un algorithme d'optimisation pour le calcul des forces de contact frottant de Coulomb

Florent CADOUX, Inria

Mots-clés : simulation numérique, frottement de Coulomb, complémentarité, optimisation conique.

Modèle. La loi de Coulomb est un modèle mécanique simple pour représenter les efforts de contact entre deux solides qui frottent l'un contre l'autre. Cette loi relie la force d'interaction $r \in \mathbb{R}^d$ (en dimension $d = 2$ ou 3) entre les solides à leur vitesse relative locale $v \in \mathbb{R}^d$. Elle fait intervenir le cône du second ordre K_μ , auquel la force r doit appartenir (μ est un paramètre physique, appelé "coefficient de frottement") :

$$r \in K_\mu := \{r \in \mathbb{R}^d : \|(r_1, \dots, r_{d-1})\| \leq \mu r_d\}. \quad (1)$$

De plus, les corps ne peuvent pas s'interpénétrer, ce qui se traduit par la condition sur les vitesses :

$$v_d \geq 0. \quad (2)$$

Notons $\text{int}(K_\mu)$ l'intérieur de K_μ et ∂K_μ son bord; la loi de Coulomb s'énonce de la manière suivante: soit $r = 0$ (décollement), soit $r \in \text{int}(K_\mu)$ et $v = 0$ (arrêt), soit $r \in \partial K_\mu \setminus \{0\}$, $v_d = 0$ et $v_{i < d}$ est colinéaire à $r_{i < d}$ et en sens inverse (frottement).

Simulation. Lorsqu'on simule numériquement la dynamique d'un système de corps susceptibles d'interagir en plusieurs points selon la loi de Coulomb, on cherche à chaque pas de temps et en chaque point de contact i un couple (r^i, v^i) qui satisfait les conditions ci-dessus et qui vérifie la loi fondamentale de la dynamique ("somme des forces égale masse fois dérivée de la vitesse"). Une fois discrétisée, cette équation différentielle devient une simple équation linéaire couplante sur $r = (r^1, \dots, r^m)$ et $v = (v^1, \dots, v^m)$. Différentes techniques ont été proposées ([1], [2]) pour résoudre ce problème, mais à notre connaissance elles ne bénéficient pas de bonnes propriétés de convergence ni d'une bonne stabilité numérique.

Approche proposée. Nous suggérons une méthode basée sur la reformulation de la loi de Coulomb comme un problème de complémentarité conique, et l'introduction de deux problèmes duals d'optimisation quadratique convexe (l'un sur K_μ , l'autre sur son dual K_μ^*) qui dépendent d'un paramètre t . La fonction objectif a la dimension d'une énergie, et sa minimisation fournit un couple de solutions primale-duale (r, u) qui vérifie "presque" la loi de Coulomb. On ajuste ensuite le paramètre t itérativement dans un algorithme de Newton non régulier pour satisfaire exactement les équations.

Cette méthode nécessite donc la minimisation répétée d'une fonction quadratique convexe sur un produit de cônes du second ordre, ce qui est réalisé par des outils standards d'optimisation ([3]) ("active set" pour $d = 2$, points intérieurs pour $d = 3$). Des expériences numériques seront données, qui montrent que l'algorithme obtenu est stable et se comporte bien en pratique. Les propriétés théoriques (existence et unicité de solutions au problème, vitesse de convergence de l'algorithme), encore à l'étude, seront abordées. On peut par exemple montrer, sous des hypothèses faibles, l'existence de solutions, et aussi exhiber des exemples simples de non-unicité.

Références

- [1] P. ALART, A. CURNIER, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.*, vol. **92**, (1991), 353–375.
- [2] G. DE SAXCÉ, *Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bipotentiel*, *C. r. Acad. sci., Sér. Iib méc. phys. astron.*, vol. **327**, (1999), 721–724.
- [3] S. BOYD, L. VANDERBERGHE, *Convex optimization*, *Cambridge University Press*, (2004).