Sauve-qui-peut ! Un voyage en grandes dimensions pour prévoir les mouvements de foule

Juliette Venel - Lagouge

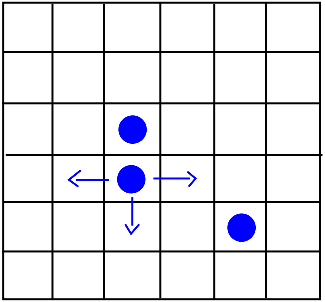
Université Polytechnique Hauts-de-France

Conférence dans le cadre du cycle
Une invention, des mathématiques
SMAI & Musée des Arts et Métiers
8 Octobre 2019

Introduction

- Situations d’évacuation d’urgence
- Densité élevée, nombreux contacts
- Fortes pressions exercées entre les individus

Modèle existant très utilisé



Automates cellulaires

Personnes = pions se déplaçant de case en case.

Mouvement possible que si la case est vide.

Pas de contact réel entre les individus.

Déplacement souhaité très contraint $\uparrow \downarrow \leftarrow \rightarrow$

Objectifs

- Déplacement souhaité moins contraint
- Gestion directe des contacts
- Déterminer les zones de fortes pressions

Plan

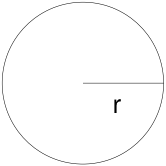
1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Plan

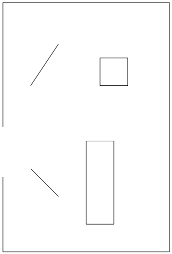
1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Les acteurs et le décor

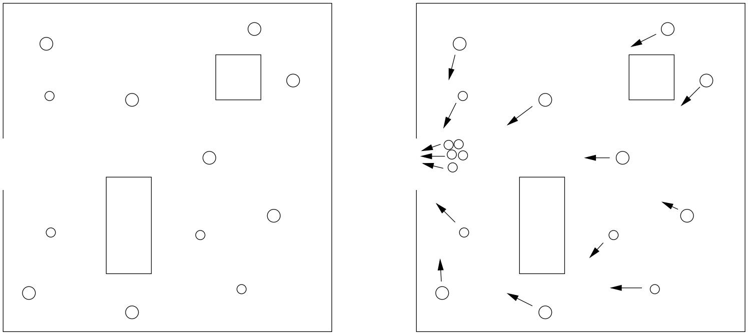
Les personnes seront représentées par des disques.



Les obstacles seront représentés par des ensembles de segments.



Deux principes

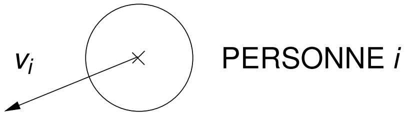


Vitesse souhaitée

Vitesse réelle

Vitesse souhaitée

Chaque personne a une vitesse souhaitée, vitesse qu'elle aurait en l'absence des autres.



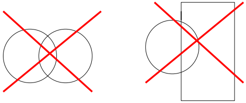
La vitesse v_i est un vecteur,
qui renferme trois informations importantes
(direction, sens, longueur).

Vitesse réelle

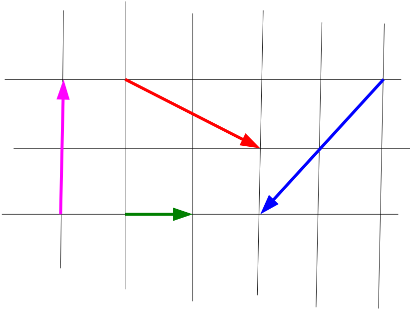
Cependant, les personnes finissent par se gêner mutuellement surtout au niveau des sorties.

Leur vitesse réelle est donc différente de leur vitesse souhaitée.

Elle doit prendre en compte des contraintes d’encombrement maximal.



Coordonnées d'un vecteur dans le plan



$(2, -1)$
$(0, 2)$
$(-2, -2)$
$(1, 0)$

Plan

1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Vitesse souhaitée

Description du comportement piétonnier

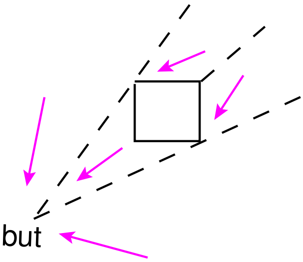
Prise en compte de la géométrie des lieux

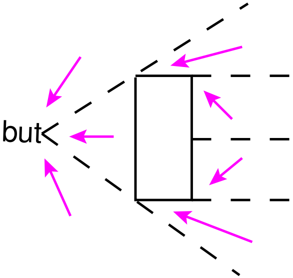
- v_i construit à la main pour donner des directions privilégiées
- v_i correspondant au plus court chemin vers la sortie

Prise en compte de la présence d'autres personnes

- ajout de stratégies

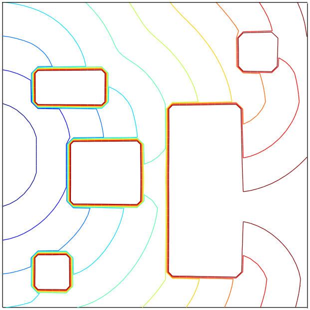
Construction à la main





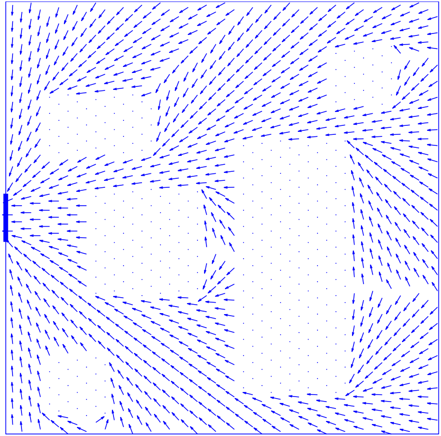
Plus court chemin vers la sortie

Pour tout point x, on note $\mathcal{D}(x)$ la longueur du plus court chemin entre x et la sortie, qui évite les obstacles.



Lignes de niveau de la distance géodésique $\mathcal{D}$.

Vitesse souhaitée associée au plus court chemin



Opposé du gradient de la distance géodésique $\mathcal{D}$.

Comment définir la vitesse réelle ?

La vitesse réelle des individus est différente de leur vitesse souhaitée.

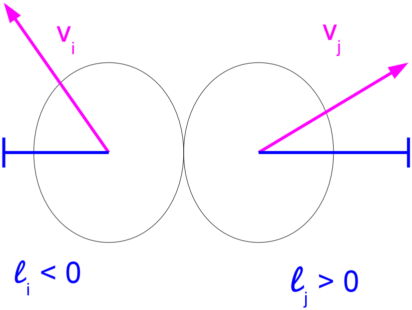
Elle doit vérifier les contraintes signalées au début :

On ne se piétine pas et on n’escalade pas les obstacles dans la pièce !

Plan

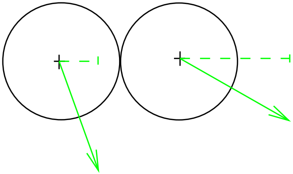
1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d’un schéma numérique
7. Résultats numériques

Traduction de la contrainte de non-chevauchement

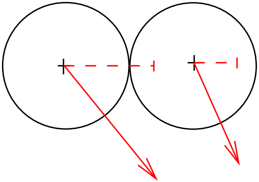


Contrainte : $\ell_j - \ell_i \geq 0$

Exemples



$\ell_j - \ell_i \geq 0$



$\ell_j - \ell_i < 0$

Notion de Vitesse admissible

Soit une configuration d'individus donnée (positions de tous les individus).

On notera la vitesse globale $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}, v_N)$ qui contient les vitesses de toutes les personnes.

On dira que la vitesse globale est admissible si elle vérifie les contraintes précédentes :

$\ell_j - \ell_i \geq 0$ dès que les personnes *i* et *j* sont en contact.

Lien entre vitesse réelle et vitesse souhaitée

On veut que la vitesse réelle globale soit admissible.

Mais connaissant la vitesse souhaitée globale, comment va-t-on déterminer la vitesse réelle globale ?

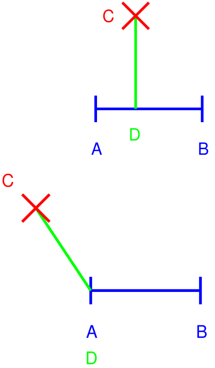
Naturellement, on aimerait que la vitesse réelle globale soit la vitesse admissible la plus proche de la vitesse souhaitée globale...

Plan

1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Distance minimale

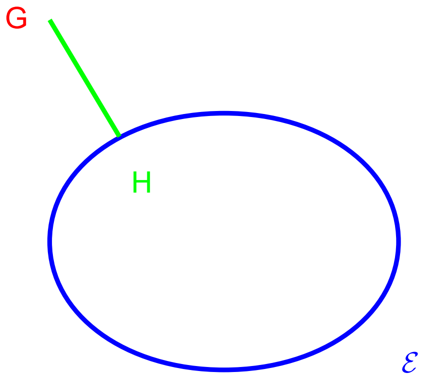
On considère un point C et un segment $[AB]$. On se trouve en C. Quel chemin doit-on prendre pour atteindre $[AB]$ le plus rapidement possible ?



Définition

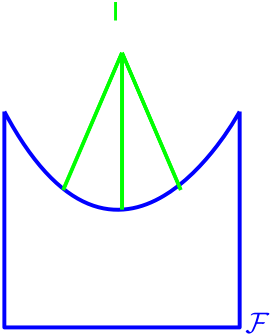
Le point D réalise le minimum de la distance de C au segment $[AB]$. Le point D est appelé la projection du point C sur le segment $[AB]$.

Autre exemple



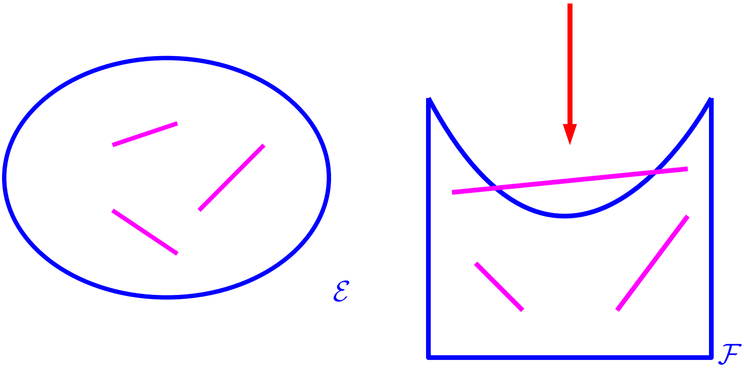
H est la projection de G sur $\mathcal{E}$.

Attention...



On ne peut pas définir ici la projection de I sur $\mathcal{F}$.

Notion de convexité



Définition

Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit convexe si pour tous points A, B de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{C}$.

Théorème

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^2$, pour tout point $M \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique point P qui réalise le minimum de la distance du point M à l'ensemble $\mathcal{C}$. Ce point est la projection de M sur $\mathcal{C}$, que l'on note $P = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}(M)$.

Théorème

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, pour tout point $M \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, il existe un unique point P qui réalise le minimum de la distance du point M à l'ensemble $\mathcal{C}$. Ce point est la projection de M sur $\mathcal{C}$, que l'on note $P = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}(M)$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{A}$ des vitesses admissibles globales est convexe fermé.

On rappelle que $\mathbf{v}$ est la vitesse souhaitée globale des N personnes.

En notant $\mathbf{u}$ la vitesse réelle globale des N personnes, le modèle s'écrit

$$\mathbf{u} = \mathrm{P}_{\mathcal{A}}\mathbf{v}.$$

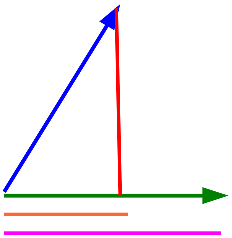
Plan

1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

PREMIER CAS :

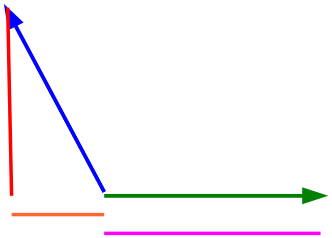
$\overrightarrow{vecteur} \bullet \overrightarrow{vecteur} = longueur \times \mathrm{longueur}$



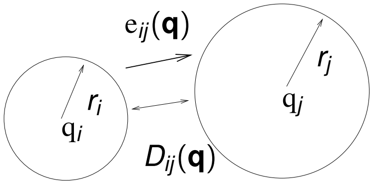
Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

SECOND CAS :

$$\overrightarrow{vecteur} \bullet \overrightarrow{vecteur} = -\,longueur \times \text{longueur}$$



Notations



$$\mathbf{q} = (\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, .., \mathrm{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

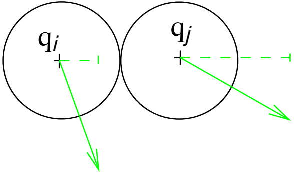
$$\mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\mathrm{q}_j - \mathrm{q}_i}{\|\mathrm{q}_j - \mathrm{q}_i\|}$$

Vitesse réelle

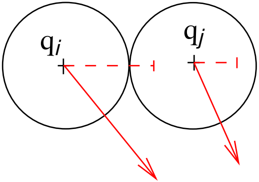
Pour gérer les contacts, on définit le

Cône des vitesses admissibles

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N},\ \forall i < j \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{v}_j \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) - \mathrm{v}_i \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0 \right\}$$



$$\mathrm{v}_j \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) - \mathrm{v}_i \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0$$



$$\mathrm{v}_j \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) - \mathrm{v}_i \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) < 0$$

Remarque : $\quad \mathrm{v}_j \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) - \mathrm{v}_i \cdot \mathrm{e}_{ij}(\mathbf{q}) = \nabla D_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}$

Modèle

Proposition

$\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ est un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^{2N}$.

On rappelle que $\mathbf{v}$ est le vecteur des vitesses souhaitées des N personnes.
En notant $\mathbf{u}$ la vitesse réelle des N personnes, le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \int \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{v}, \end{cases}$$

où $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ est une configuration initiale admissible.

Problème bien posé

Théorème

Sous certaines hypothèses, il existe une unique fonction $\mathbf{q}$ solution du problème précédent

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \int \mathbf{u}, \\ &\mathbf{u} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}_{\mathbf{q}}} \mathbf{v}, \end{aligned}\right.$$

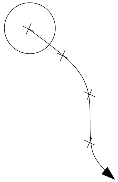
pour toute configuration initiale $\mathbf{q}_0$ admissible.

Plan

1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Résolution *numérique* ? C'est quoi ?

On ne sait pas calculer tous les points de la trajectoire
$\Longrightarrow$ on choisit de l'approcher à certains instants.



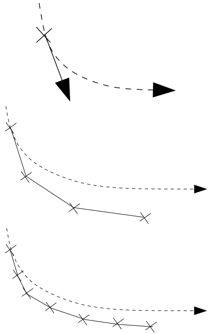
Comment passe-t-on d'un point à l'autre ?

- à vitesse constante
- la vitesse est calculée "au mieux", en s'approchant du modèle.

C'est ce que l'on appelle *schéma numérique*

Comment ça marche ?

- on approche des courbes par des droites
- la vitesse et la direction ne sont pas exactes



$\Rightarrow$ On fait nécessairement des erreurs.

Si on augmente le nombre de points, on doit s'approcher de la trajectoire exacte.

Définition

On dit qu'un schéma numérique est *convergent* si l'erreur tend vers zéro quand on diminue le pas de temps.

Schéma numérique

On cherche à approcher la solution $\mathbf{q}$ du problème précédent sur un intervalle de temps $[0, T]$.
Pour cela, on va calculer à certains instants $t^{\mathrm{n}} \in [0, T]$, une approximation de $\mathbf{q}(t^{\mathrm{n}})$ notée $\mathbf{q}^{\mathrm{n}}$,

$$\mathbf{q}(t^{\mathrm{n}}) \approx \mathbf{q}^{\mathrm{n}}.$$

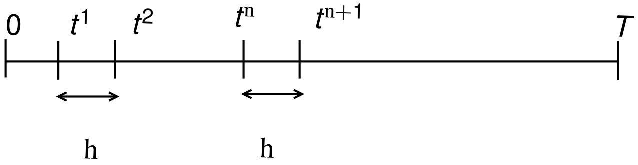


Schéma numérique

Initialisation : $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}_0$

Boucle en temps : $\mathbf{q}^{\mathrm{n}}$ connu

$$\mathbf{u}^{\mathrm{n}} = \mathsf{P}_{\widetilde{C_{\mathrm{h}}}(\mathbf{q}^{\mathrm{n}})}(\mathbf{v}^{\mathrm{n}})$$

$$\mathbf{q}^{\mathrm{n}+1} = \mathbf{q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{h}\,\mathbf{u}^{\mathrm{n}}.$$

Proposition

Les configurations $\mathbf{q}^{\mathrm{n}}$ ainsi calculées sont admissibles.
Pour tout n, pour tous $i,\ j$, $D_{ij}(\mathbf{q}^{\mathrm{n}}) \geq 0$.

Convergence

On note $\mathbf{q}_{\mathrm{h}}$ la fonction (affine par morceaux) qui vaut $\mathbf{q}^{\mathrm{n}}$ à l'instant t^{n}.

Théorème

Sous certaines hypothèses, on a à chaque instant $t \in [0, T]$:

$$\mathbf{q}_{\mathrm{h}}(t) \to \mathbf{q}(t)$$

lorsque h tend vers 0.

Plan

1. Présentation du modèle
2. Vitesse souhaitée
3. Contraintes sur la vitesse réelle
4. Notion de projection
5. Ecriture mathématique
6. Présentation d'un schéma numérique
7. Résultats numériques

Résultats numériques

- Formation d'arches
- Ajout de stratégies individuelles
- Évacuation d'un bâtiment