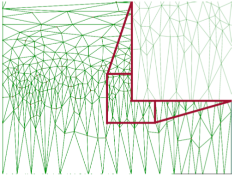
Maillage pour la simulation numérique, quelques problèmes, questions et éléments de réponse

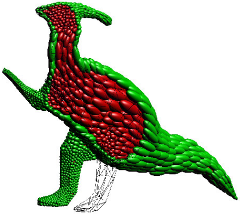
Paul Louis George, Inria, Paris-Rocquencourt, EPI Gamma3

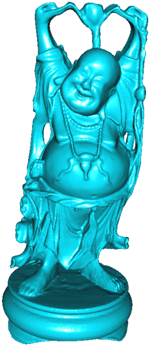
Forum des lauréats, Académie des sciences, Inria, Smai

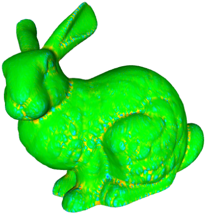
- Quelques images de maillages
- Quelques images de problèmes
- Quelques images de maillages
- Voronoï et Delaunay, problèmes de triangulation
- Quelques bizarreries et challenges à relever
- Encore des images pour finir

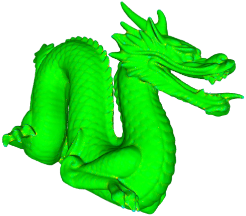
Quelques images de maillages (1/1).



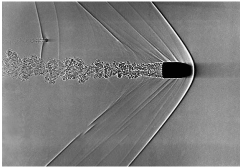


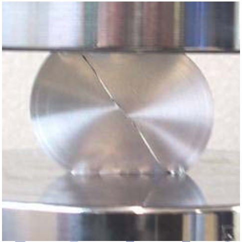






Quelques images de problèmes. Exemples de problèmes industriels (1/2).



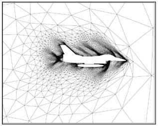
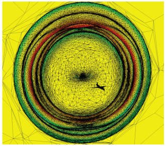
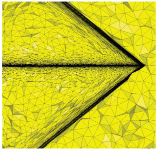
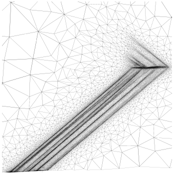
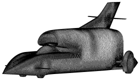
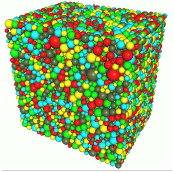
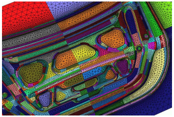
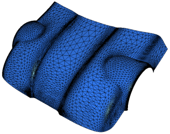
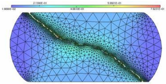
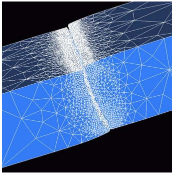
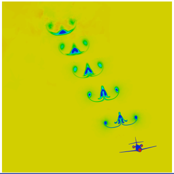
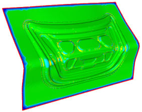


.

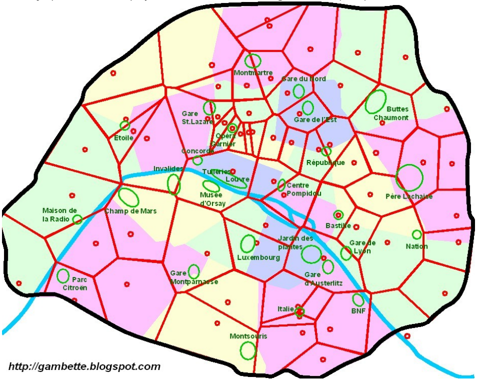
Schéma synthétique d'une simulation numérique (2/2).

- Modélisation du phénomène à étudier $--\ >$ équations (EDP dans notre cas)
- équation continue $--\ >$ système discret
- méthode de résolution
- domaine continu $--\ >$ domaine discrétisé (maillage)
- résolution numérique du système sur le maillage
- analyse des résultats (traitement numérique, graphique, ...)
- etc.

Quelques images de maillages (1/1).

Voronoï (1868-1908) et Delaunay (1890-1980), problèmes de triangulation (1/5).



$$V(P_i) = \left\{ M \quad t.q. \quad d(M, P_i) \leq d(M, P_j), j \neq i \right\}$$

Delaunay et son fameux lemme (2/5).

ВЕСТИЯ ... МИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

SUR LA SPHÈRE VIDE

À LA MEMOIRE DE GEORGES VORONOÏ

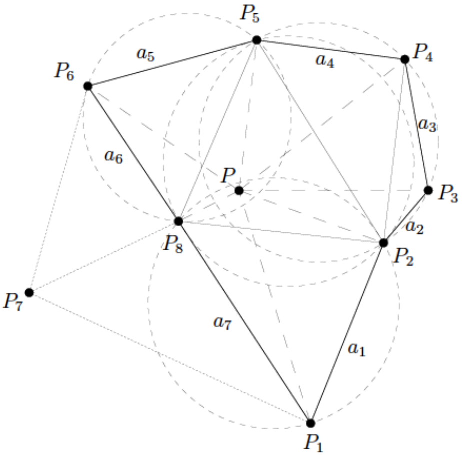
Par B. DELAUNAY

(*Presenté par* I. Vinogradov, *membre de l'Académie*)

§ 1. **Lemme général.** *Soient T des tétraèdres tout à fait arbitraires qui partagent uniformément l'espace à n dimensions étant contigus par des faces entières à $n-1$ dimensions et tels qu'un domaine quelconque limité (c'est-à-dire à diamètre limité) ait des points communs seulement avec un nombre limité de ces tétraèdres, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'aucune sphère circonscrite à un tel tétraèdre ne contienne dans son intérieur aucun sommet d'aucun de ces tétraèdres est que cela ait lieu pour chaque paire de deux de ces tétraèdres contigus par une face à $n-1$ dimensions, c'est-à-dire que dans chaque telle paire le sommet d'un de ces tétraèdres ne soit pas intérieur à la sphère circonscrite à l'autre, et réciproquement.*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} - \mathcal{C} + \mathcal{B}$$

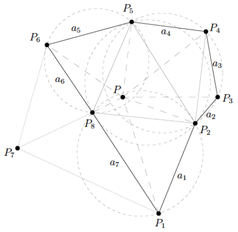
Construction effective de la triangulation (3/5).



$$\mathcal{T} = \mathcal{T} - \mathcal{C} + \mathcal{B}$$

Historiques: Hermeline (1980), Bowyer, Watson, Weatherill, ..., Borouchaki, P.L. G., ...

Construction effective de la triangulation (4/5).



- Localiser P
- Trouver les triangles à détruire
- Enlever ces triangles
- reboucher le trou en connectant P aux arêtes bord du trou
- Vérifier la validité (simulation *a priori*) puis si OK mettre à jour la structure (éléments, voisins, rayons, centres), ..., et tout ceci le plus *rapidement* possible.

Et, de plus

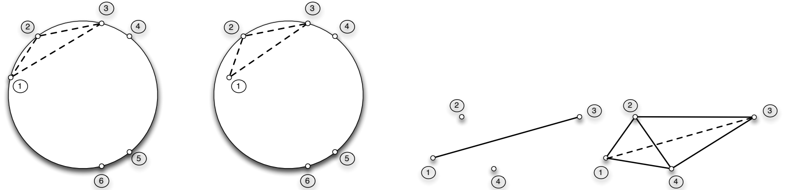
- on peut ajouter des contraintes métriques et/ou topologiques.

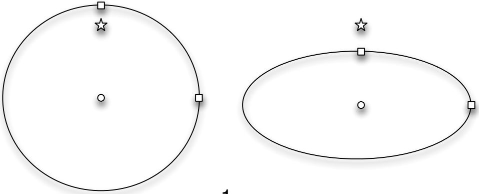
Et encore, challenges: robustesse, vitesse.

Et du point de vue informatique (5/5).

- le monde cruel des flottants (robustesse),
- $h \longrightarrow 0$ et alors $n \longrightarrow \infty$ (cache + mémoire tout court)
- quelques dogmes:
  - ne pas être dogmatique
  - être prêt à violenter la théorie
  - algorithmes quadratiques proscrits (prendre une hache, mettre une touche de Hilbert, ...)
  - essayer de comprendre pourquoi ou pourquoi pas
  - ne pas nécessairement suivre les modes
  - plus le reste, ...

Quelques bizzareries et challenges à relever (1/1).





$$l_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 \sqrt{< \vec{AB}\mathcal{M}(A+t\vec{AB})\vec{AB} >}dt$$

Maillages (1/3).

- Pour quoi faire ?
  - Maillages géométriques,
  - Maillages de calculs,
  - both of them.
- Comment les construire ?
  - **et, tout d'abord, le problème d'existence se pose.**
  - trianguler ne suffit pas,
  - intégrité de la frontière (point dur)
  - les points internes, où et combien ?
  - connecter ces points sous contrainte,
  - une optimisation pour améliorer la qualité des éléments.

Historiques: Hermeline (1980), Weatherill, Peraire, Lohner, Marcum, Baker, Shephard, Borouchaki, Hecht, PL.G., ...

Maillages du point de vue pratique (2/3).

- CAO, maillage de la surface,
- maillage du domaine volumique au mieux (inventer un champ de métriques),
- puis ADAPTATION de MAILLAGE
  - -A- calcul de la solution du problème,
  - estimation de l'erreur, si non convergé, construction d'un champ de métriques,
  - maillage, remaillage avec ce champ,
  - retour en -A-
- visualisation, exploitation de la solution.

Cas non stationnaires: double boucle.

Maillages mobiles, plus dur évidemment.

Maillages du point de vue théorique (3/3).

Le concept de maillage continu comme base théorique.

Discret	**Continu**
Élément K	Tenseur métrique $\mathcal{M}$
Volume $\vert K\vert$	Volume $\alpha\,(\det \mathcal{M})^{-\frac{1}{2}}$
Maillage $\mathcal{H}$ de Ω_h	Espace métrique Riemannien $\mathbf{M} = (\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Omega}$
Nombre de sommets N_v	Complexité $\mathcal{C}(\mathbf{M}) = \int_\Omega \sqrt{\det(\mathcal{M}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}$
Interpolant linéaire $\Pi_h u$	Interpolant linéaire continu $\pi_{\mathcal{M}} u$

Ce cadre permet d'utiliser de nombreux outils mathématiques justifiant ainsi les choix (éventuellement déjà trouvés de manière empirique).

Sources: Adrien Loseille, Frédéric Alauzet et quelques malheureux(ses) thésard(e)s.

Encore des images pour finir (1/2).

Shearing problematic

Shearing problematic

Sources: Géraldine (Caroline) Olivier et Frédéric Alauzet.

Encore des images pour finir (2/2).

Moving Mesh

Sources: Frédéric Alauzet.

Conclusions (1/1).

- des sujets issus de la demande industrielle
- des algorithmes donnant des papiers et des codes
- de vraies applications industrielles[1] en guise de validation
- et une diffusion, la plus large possible, des codes

- on n'a vu que quelques aspects du problème, *i.e.* pas grand chose évidemment.

[1] pas des lapins, quoi !