Grandes solutions globales régulières pour l'équation de Navier-Stokes tridimentionnelle

Jean-Yves Chemin, Université Pierre et Marie Curie,
Laboratoire Jacques-Louis Lions

L'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

où $\nu > 0$ est la viscosité du fluide, supposée 1 dans la suite et

$$v = (v^1, v^2, v^3), \quad v\cdot\nabla = v^1\frac{\partial}{\partial x_1} + v^2\frac{\partial}{\partial x_2} + v^3\frac{\partial}{\partial x_3}\,, \quad \nabla p = \Big(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\Big),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v = \frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3}\cdot$$

L'équation de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

où $\nu > 0$ est la viscosité du fluide, supposée 1 dans la suite et

$$v = (v^1, v^2, v^3), \quad v \cdot \nabla = v^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \nabla p = \Big(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \Big),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v = \frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3}.$$

Un champ de vecteurs dépendant du temps v dont les composantes sont $L^2_{loc}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ est une solution (faible) de (NS_ν) si pour tout champ de vecteurs indéfiniment différentiable à support compact et de divergence nulle Ψ,

$$\langle v(t,\cdot), \Psi(t,\cdot) \rangle = \langle v_0 \Psi(0,\cdot) \rangle + \int_0^t \langle f(t',\cdot), \Psi(t',\cdot) \rangle dt'$$
$$+ \int_0^t \Big(\langle v, \Delta \Psi \rangle + \langle v \otimes v, \nabla \Psi \rangle + \langle v, \partial_t \Psi \rangle \Big)(t')\, dt'.$$

Les théorèmes fondateurs de J. Leray

Théorème (J. Leray, 1934) *Soit* u_0 *dans* $L^2(\mathbb{R}^3)$. *Il existe une solution globale turbulente de* (NS) *c'est-à-dire une solution* u *appartenant à* $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$ *qui de plus satisfait*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Les théorèmes fondateurs de J. Leray

Théorème (J. Leray, 1934) *Soit* u_0 *dans* $L^2(\mathbb{R}^3)$*. Il existe une solution globale turbulente de* (NS) *c'est-à-dire une solution* u *appartenant à* $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$ *qui de plus satisfait*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Théorème (J. Leray, 1934) *Si* $\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2}$ *assez petit, alors il existe une unique solution globale continue borné de* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs* H^1

Les théorèmes fondateurs de J. Leray

Théorème (J. Leray, 1934) *Soit u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Il existe une solution globale turbulente de (NS) c'est-à-dire une solution u appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$ qui de plus satisfait*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Théorème (J. Leray, 1934) *Si $\|u_0\|_{L^2}\|\nabla u_0\|_{L^2}$ assez petit, alors il existe une unique solution globale continue borné de $\mathbb{R}^+$ à valeurs H^1*

– méthode de compacité (Ascoli)

– méthode de point fixe (Picard)

Le cas des données petites : le point de vue de Kato

Définition *On appelle $\mathbb{B}$ la forme bilinéaire définie par*

$$\partial_t \mathbb{B}(u,v) - \Delta \mathbb{B}(u,v) = -\frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(\mathrm{div}(u \otimes v) + \mathrm{div}(v \otimes u)\Big)$$
$$\mathbb{B}(u,v)_{|t=0} = 0$$

où $\mathbb{P}$ désigne le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle i.e.

$$\mathbb{P}f \stackrel{\text{déf}}{=} f - \nabla\Delta^{-1}\,\mathrm{div}\, f.$$

Le cas des données petites : le point de vue de Kato

Définition *On appelle $\mathbb{B}$ la forme bilinéaire définie par*

$$\partial_t \mathbb{B}(u,v) - \Delta \mathbb{B}(u,v) = -\frac{1}{2}\mathbb{P}\Big(\mathrm{div}(u\otimes v) + \mathrm{div}(v \otimes u)\Big)$$
$$\mathbb{B}(u,v)_{|t=0} = 0$$

où $\mathbb{P}$ désigne le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle i.e.

$$\mathbb{P}f \stackrel{\text{déf}}{=} f - \nabla\Delta^{-1}\,\mathrm{div}\, f.$$

Résoudre le système (NS) apparaît alors équivalent à résoudre

$$v = e^{t\Delta}v_0 + \mathbb{B}(v,v)$$

Le problème devient alors de trouver un espace de Banach X adapté de fonctions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un espace tel que tel que l'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ envoie continûment $X \times X$ dans X.

Le problème devient alors de trouver un espace de Banach X adapté de fonctions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un espace tel que tel que l'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ envoie continûment $X \times X$ dans X.

Remarque fondamentale D'après l'invariance par translation et l'invariance d'échelle de l'équation, la norme sur X doit vérifier

$$\|f(\lambda^2 t, \lambda(x - \overrightarrow{a}))\|_X \sim \lambda^{-1} \|f\|_X$$

Le problème devient alors de trouver un espace de Banach X adapté de fonctions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un espace tel que tel que l'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ envoie continûment $X \times X$ dans X.

Remarque fondamentale D'après l'invariance par translation et l'invariance d'échelle de l'équation, la norme sur X doit vérifier

$$\|f(\lambda^2 t, \lambda(x - \overrightarrow{a}))\|_X \sim \lambda^{-1} \|f\|_X$$

Théorème *Soit X un espace adapté ; si v_0 est telle que $\|e^{t\Delta} v_0\|_X$ est assez petit, alors il existe une unique solution de (NS) dans X.*

Le problème devient alors de trouver un espace de Banach X adapté de fonctions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un espace tel que tel que l'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ envoie continûment $X \times X$ dans X.

Remarque fondamentale D'après l'invariance par translation et l'invariance d'échelle de l'équation, la norme sur X doit vérifier

$$\|f(\lambda^2 t, \lambda(x - \overrightarrow{a}))\|_X \sim \lambda^{-1}\|f\|_X$$

Théorème *Soit X un espace adapté ; si v_0 est telle que $\|e^{t\Delta}v_0\|_X$ est assez petit, alors il existe une unique solution de (NS) dans X.*

C'est simplement le théorème de Picard !

À la recherche du plus grand espace adapté

Proposition (Y. Meyer) *Soit X_0 un espace de Banach continûment inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et tel que*

$$\|f(\lambda(\cdot - \overrightarrow{a}))\|_{X_0} \sim \lambda^{-1}\|f\|_{X_0}.$$

On alors

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{X_0}.$$

À la recherche du plus grand espace adapté

Proposition (Y. Meyer) *Soit* X_0 *un espace de Banach continûment inclus dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ *et tel que*

$$\|f(\lambda(\cdot - \overrightarrow{a}))\|_{X_0} \sim \lambda^{-1}\|f\|_{X_0}.$$

On alors

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|e^{t\Delta}f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{X_0}.$$

Démonstration Remarquons que

$$|\langle f, e^{-|\cdot|^2}\rangle| \leq C\|f\|_{X_0}$$

À la recherche du plus grand espace adapté

Proposition (Y. Meyer) *Soit X_0 un espace de Banach continûment inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et tel que*

$$\|f(\lambda(\cdot - \overrightarrow{a}))\|_{X_0} \sim \lambda^{-1}\|f\|_{X_0}.$$

On alors

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|e^{t\Delta}f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{X_0}.$$

Démonstration Remarquons que

$$|\langle f, e^{-|\cdot|^2}\rangle| \leq C\|f\|_{X_0}$$

Par dilatation et translation, on en déduit que

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|e^{t\Delta}f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{X_0}.$$

L'espace de Koch et Tataru

Le schéma itératif impose que $e^{t\Delta}v_0$ soit dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$. L'invariance d'échelle et la proposition précédente conduisent à la

Définition *On désigne par X l'espace des fonctions f de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\|f\|_X \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t>0} \biggl(t^{\frac{1}{2}} \|f(t)\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^3\\ R>0}} R^{-\frac{3}{2}} \Bigl(\int_0^{R^2} \int_{B(x,R)} |f(t,y)|^2 dy dt \Bigr)^{\frac{1}{2}} \biggr) < \infty,$$

L'espace de Koch et Tataru

Le schéma itératif impose que $e^{t\Delta}v_0$ soit dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$. L'invariance d'échelle et la proposition précédente conduisent à la

Définition *On désigne par X l'espace des fonctions f de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\|f\|_X \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t>0}\left(t^{\frac{1}{2}}\|f(t)\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^3 \\ R>0}} R^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^{R^2}\int_{B(x,R)} |f(t,y)|^2 dy dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \infty,$$

Théorème *(H. Koch et D. Tataru, 2001) L'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ est continu de $X \times X$ dans X.*

L'espace de Koch et Tataru

Le schéma itératif impose que $e^{t\Delta}v_0$ soit dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$. L'invariance d'échelle et la proposition précédente conduisent à la

Définition *On désigne par X l'espace des fonctions f de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\|f\|_X \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t>0}\Big(t^{\frac12}\|f(t)\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^3\\ R>0}} R^{-\frac32}\Big(\int_0^{R^2}\int_{B(x,R)} |f(t,y)|^2 dydt\Big)^{\frac12}\Big) < \infty,$$

Théorème *(H. Koch et D. Tataru, 2001) L'opérateur bilinéaire $\mathbb{B}$ est continu de $X \times X$ dans X.*

Exemple Si

$$v_{0,\varepsilon}(x) = \frac{\lambda}{\varepsilon}\cos\Big(\frac{x_3}{\varepsilon}\Big)\Big(-\partial_2\varphi(x), \partial_1\varphi(x), 0\Big),$$

alors

$$\|e^{t\Delta}v_{0,\varepsilon}\|_X \leq \lambda C_\varphi.$$

Un exemple de grandes solutions globales régulières

Pour $a > 0$, définissons $e^{a|D_3|}u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}(e^{a|\xi_3|}\widehat{u}(\xi))$.

Un exemple de grandes solutions globales régulières

Pour $a > 0$, définissons $e^{a|D_3|}u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}(e^{a|\xi_3|}\widehat{u}(\xi))$.

Theorem (I. Gallagher, M. Paicu, JYC, Annals of Maths 2011) *Soit* u_0 *un champ de vecteurs de divergence nulle tel que* $\|e^{a|D_3|}v_0\|_{H^4}$ *soit assez petit. Si* ε *est assez petit, la donnée initiale*

$$\left(v_0^h(x_h, \varepsilon x_3), \frac{1}{\varepsilon} v_0^3(x_h, \varepsilon x_3)\right)$$

génère des solutions globales régulières sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

Le système remis à l'échelle

On recherche la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(v^h(t,x_h,\varepsilon x_3), \frac{1}{\varepsilon} v^3(t,x_h,\varepsilon x_3)\Big).$$

Le système remis à l'échelle

On recherche la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(v^h(t,x_h,\varepsilon x_3), \frac{1}{\varepsilon} v^3(t,x_h,\varepsilon x_3)\Big).$$

Ceci conduit à

$$(RNS_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v^h - \Delta_\varepsilon v^h + v\cdot\nabla v^h = -\nabla^h q \\ \partial_t v^3 - \Delta_\varepsilon v^3 + v\cdot\nabla v^3 = -\varepsilon^2 \partial_3 q \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

avec $\Delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + \varepsilon^2 \partial_3^2$

Le système remis à l'échelle

On recherche la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(v^h(t,x_h,\varepsilon x_3), \frac{1}{\varepsilon} v^3(t,x_h,\varepsilon x_3)\Big).$$

Ceci conduit à

$$(RNS_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v^h - \Delta_\varepsilon v^h + v\cdot\nabla v^h = -\nabla^h q \\ \partial_t v^3 - \Delta_\varepsilon v^3 + v\cdot\nabla v^3 = -\varepsilon^2\partial_3 q \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

avec $\Delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + \varepsilon^2\partial_3^2$ et

$$\Delta_\varepsilon q = \sum_{j,k} \partial_j v^k \partial_k v^j = \sum_{1\leq j,k\leq 2} \partial_j v^k \partial_k v^j + (\operatorname{div}_h v^h)^2 + \sum_{1\leq j\leq 2} \partial_3 v^j \partial_j v^3.$$

Le système remis à l'échelle

On recherche la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(v^h(t,x_h,\varepsilon x_3), \frac{1}{\varepsilon} v^3(t,x_h,\varepsilon x_3)\Big).$$

Ceci conduit à.

$$(RNS_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v^h - \Delta_\varepsilon v^h + v\cdot\nabla v^h = -\nabla^h q \\ \partial_t v^3 - \Delta_\varepsilon v^3 + v\cdot\nabla v^3 = -\varepsilon^2 \partial_3 q \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

avec $\Delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + \varepsilon^2 \partial_3^2$ et

$$\Delta_\varepsilon q = \sum_{j,k} \partial_j v^k \partial_k v^j = \sum_{1\leq j,k\leq 2} \partial_j v^k \partial_k v^j + (\operatorname{div}_h v^h)^2 + \sum_{1\leq j\leq 2} \partial_3 v^j \partial_j v^3.$$

Le sytème (RNS_ε) est mal posé !

A model problem

Étudions le système modèle suivant

$$(MP) \quad \dot{u} + \gamma u = a(D)(u^2)$$

où $a(D)$ est un multiplicateur de Fourier d'ordre 1 et γ un nombre positif.

Définissons

$$\|f\|^2_{L^2_j} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{and} \quad \|f\|_{B^s} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \left(2^{js}\|u\|_{L^2_j}\right)_j \right\|_{\ell^1}.$$

Theorem *Si* $\|e^{\delta|D|}u_0\|_{B^{\frac{3}{2}}}$ *est assez petit , il existe une solution de* (MP) *dans* $L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^+; B^{\frac{3}{2}})$*.*

Une méthode de Cauchy-Kowalevska globale

Pour toute fonction Ψ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$ et f sur $\mathbb{R}^d$, on définit

$$f_\Psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\Psi(t,\cdot)}\widehat{f}(t,\cdot)\Big) \quad \text{and} \quad f^+ = \mathcal{F}^{-1}|\widehat{f}|.$$

Introduisons

$$\dot\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|u_\Phi(t)\|_{B^{\frac{3}{2}}} \quad \text{with} \quad \theta(0) = 0 \quad \text{and} \quad \Phi(t,\xi) = (\delta - \lambda\theta(t))|\xi|.$$

qui peut s'écrire

$$\dot\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j 2^{j\frac{3}{2}}\|e^{(\delta-\theta(t))|D|}u(t)\|_{L^2_j}.$$

La formule de Duhamel donne

$$e^{\gamma t}|\widehat{u}(t,\xi)| \leq |\widehat{u}_0(\xi)| + C\int_0^t e^{\gamma t'}|\xi|\mathcal{F}(u^+(t')^2)(\xi)dt'.$$

Tant que $\delta - \lambda\theta(t)$ reste positive, on a

$$(\delta - \lambda\theta(t))|\xi| \leq (\delta - \lambda\theta(t))|\xi - \eta| + (\delta - \lambda\theta(t))|\eta| - \lambda|\xi|\int_{t'}^t \dot{\theta}(t'')dt''$$

Ceci donne

$$e^{\gamma t}|\widehat{u}_\Phi(t,\xi)| \leq |e^{\delta|\xi|}\widehat{u}_0(\xi)| + C\int_0^t e^{\gamma t' - \lambda|\xi|\int_{t'}^t \dot{\theta}(t'')dt''}|\xi|\mathcal{F}(u_\Phi^+(t')^2)(\xi)dt'.$$

$$e^{\gamma t}\|u_\Phi(t)\|_{L^2_j} \leq \|e^{\delta|D|}\ u_0\|_{L^2_j} + C\int_0^t e^{-\lambda 2^j \int_{t'}^t \dot\theta(t'')dt''} 2^j e^{\gamma t'}\|u_\Phi^+(t')^2\|_{L^2_j} dt'.$$

Lemma

$$2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t'}\|a^2(t)\|_{L^2_j} \leq Cc_j\|a(t)\|_{L^2_j}\sum_j 2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t}a(t)\|_{L^\infty_T(L^2_j)} \quad \text{with} \quad \sum_j c_j = 1.$$

Ceci donne

$$2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t}u_\Phi(t)\|_{L^\infty_T(L^2_j)} \leq \|e^{\delta|D|}\ u_0\|_{L^2_j}$$
$$+Cc_j\int_0^t 2^j e^{-\lambda 2^j \int_{t'}^t \dot\theta(t'')dt''}\dot\theta(t')dt' \sum_j 2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t}u_\Phi(t)\|_{L^\infty_T(L^2_j)}$$

Par sommation sur j, on trouve

$$e^{\gamma t}\dot\theta(t) \leq \sum_j 2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t}u_\Phi(t)\|_{L^\infty_T(L^2_j)} \leq \|e^{\delta|D|}\ u_0\|_{B^{\frac{3}{2}}} + \frac{C}{\lambda}\sum_j 2^{j\frac{3}{2}}\|e^{\gamma t}u_\Phi(t)\|_{L^\infty_T(L^2_j)}.$$